



Titre: Commande optimale conjointe puissance-débit dans les réseaux
cellulaires multimédias

Auteur: Omar Messas

Date: 2004

Type: Mémoire ou thèse / Dissertation or Thesis

Référence: Messas, O. (2004). Commande optimale conjointe puissance-débit dans les
réseaux cellulaires multimédias [Master's thesis, École Polytechnique de
Montréal]. PolyPublie. <https://publications.polymtl.ca/7435/>

 **Document en libre accès dans PolyPublie**
Open Access document in PolyPublie

URL de PolyPublie: <https://publications.polymtl.ca/7435/>
PolyPublie URL:

**Directeurs de
recherche:**
Advisors:

Programme: Unspecified
Program:

UNIVERSITÉ DE MONTRÉAL

COMMANDE OPTIMALE CONJOINTE PUISSANCE-DÉBIT DANS LES
RÉSEAUX CELLULAIRES MULTIMÉDIAS

OMAR MESSAS
DÉPARTEMENT DE GÉNIE ÉLECTRIQUE
ÉCOLE POLYTECHNIQUE DE MONTRÉAL

MÉMOIRE PRÉSENTÉ EN VUE DE L'OBTENTION
DU DIPLÔME DE MAÎTRISE ÈS SCIENCES APPLIQUÉES
(AUTOMATION)
DÉCEMBRE 2004



Library and
Archives Canada

Bibliothèque et
Archives Canada

Published Heritage
Branch

Direction du
Patrimoine de l'édition

395 Wellington Street
Ottawa ON K1A 0N4
Canada

395, rue Wellington
Ottawa ON K1A 0N4
Canada

Your file Votre référence

ISBN: 0-494-01371-0

Our file Notre référence

ISBN: 0-494-01371-0

NOTICE:

The author has granted a non-exclusive license allowing Library and Archives Canada to reproduce, publish, archive, preserve, conserve, communicate to the public by telecommunication or on the Internet, loan, distribute and sell theses worldwide, for commercial or non-commercial purposes, in microform, paper, electronic and/or any other formats.

The author retains copyright ownership and moral rights in this thesis. Neither the thesis nor substantial extracts from it may be printed or otherwise reproduced without the author's permission.

AVIS:

L'auteur a accordé une licence non exclusive permettant à la Bibliothèque et Archives Canada de reproduire, publier, archiver, sauvegarder, conserver, transmettre au public par télécommunication ou par l'Internet, prêter, distribuer et vendre des thèses partout dans le monde, à des fins commerciales ou autres, sur support microforme, papier, électronique et/ou autres formats.

L'auteur conserve la propriété du droit d'auteur et des droits moraux qui protègent cette thèse. Ni la thèse ni des extraits substantiels de celle-ci ne doivent être imprimés ou autrement reproduits sans son autorisation.

In compliance with the Canadian Privacy Act some supporting forms may have been removed from this thesis.

Conformément à la loi canadienne sur la protection de la vie privée, quelques formulaires secondaires ont été enlevés de cette thèse.

While these forms may be included in the document page count, their removal does not represent any loss of content from the thesis.

Bien que ces formulaires aient inclus dans la pagination, il n'y aura aucun contenu manquant.

UNIVERSITÉ DE MONTRÉAL

ÉCOLE POLYTECHNIQUE DE MONTRÉAL

Ce mémoire intitulé:

COMMANDE OPTIMALE CONJOINTE PUISSANCE-DÉBIT DANS LES
RÉSEAUX CELLULAIRES MULTIMÉDIAS

présenté par: MESSAS Omar

en vue de l'obtention du diplôme de: Maîtrise ès sciences appliquées

a été dûment accepté par le jury d'examen constitué de:

M. GOURDEAU Richard, Ph.D., président

M. MALHAMÉ Roland, Ph.D., membre et directeur de recherche

M. FRIGON Jean-François, Ph.D., membre

Je dédie ce travail avant tout à mes parents: à ma mère, celle qui aura suivi de loin, mais de près, mon évolution. Sans ses encouragements, je ne serais pas rendu là aujourd'hui; à mon père, pour ses précieux conseils habituels, et pour son soutien inconditionnel, comme toujours.

Je tiens également à dédier ce travail à mes sœurs et mon frère, pour leur soutien moral, et pour avoir partagé avec moi quelques aventures de la vie. Aussi, je tiens à dédier ce mémoire à Raymond, pour sa grande générosité que je n'oublierai jamais.

Enfin, je ne saurais finir ces quelques lignes, sans dédier du fond du cœur ce travail, à Audrey, la première qui aura vu ce travail naître.

REMERCIEMENTS

Je tiens à remercier spécialement, mon directeur de recherche, le professeur Roland Malhamé, pour tout ce qu'il a fait pour la réalisation de ce travail, pour l'aide financière qu'il m'a généreusement accordée, pour ses compétences de chercheur de haut niveau, et aussi, pour la confiance qu'il m'a témoignée, sans oublier, ses qualités humaines que j'ai beaucoup appréciées.

Enfin, pour m'avoir appris ce que personne ne m'a appris à l'École Polytechnique de Montréal.

Je tiens également à remercier, les membres du jury, monsieur Richard Gourdeau et monsieur Jean-François Frigon pour avoir accepté de juger mon travail, ainsi que pour les conseils qu'ils m'ont adressés.

Enfin, je tiens à remercier l'ensemble de mes collègues du laboratoire d'automation: Étienne Lachance, Mustapha Benachour, Sylvain Marleau, Karim Khial, Tarik Saadna, Évariste Feurtey, Cédric Demers-Roy et j'en oublie certainement, pour leur sympathie ainsi que pour l'esprit chaleureux qui régnait dans le laboratoire. Sans oublier les techniciens, Marie-Lyne Brisson, Jean-Sébastien Décarie et Richard Grenier ainsi que la secrétaire de la section Suzanne Vallade, pour leur disponibilité, leur professionnalisme et surtout pour leur très grande sympathie.

RÉSUMÉ

Dans ce travail, nous avons étudié le contrôle conjoint puissance/débit dans les réseaux cellulaires multimédias de troisième génération. Bien que le contexte pratique soit hautement aléatoire, nous avons fait le choix dans ce mémoire d'une modélisation déterministe des phénomènes. Ainsi l'algorithme de commande découvre et s'ajuste à de nouvelles situations, au fur et à mesure qu'elles se développent, sans anticipation aucune, comme ce serait le cas pour une formulation proprement stochastique.

Le passage d'une contrainte sur les puissances vers une contraintes sur les débits, permet d'intégrer l'analyse sur les deux variables importantes à contrôler afin de réaliser une synthèse optimale du contrôle. Pour ce faire, la théorie de la commande optimale, nous a permis au départ de formuler rigoureusement le problème de gestion optimale des ressources de transmission. Dans sa formulation originale, le problème comporte des contraintes non linéaires le rendant difficile à résoudre. Des raisonnements basés sur la physique des processus en jeu, nous permettent alors de linéariser sans perte d'optimalité la contrainte non linéaire, et éventuellement de l'intégrer au sein même de la dynamique. Les limitations sur les débits de données maximaux et la non négativité de ces derniers, sont maintenues par un mécanisme de pénalisation approprié, qui nous permet d'obtenir la synthèse dans le cadre de la théorie des régulateurs linéaires quadratiques optimaux.

Enfin, pour un nombre d'utilisateurs N grand, l'introduction de la notion de système agrégé pour le calcul des gains du retour d'état de la commande optimale à partir d'un système à seulement trois usagers, s'avère un outil puissant pour optimiser les calculs lorsqu'il faut réaliser le contrôle en temps réel.

Des simulations pour le temps réel illustrent le grand degré de flexibilité des algorithmes développés, et le caractère intéressant des performances obtenues.

ABSTRACT

In this work, we have studied the problem of joint power/data-rate control in third generation cellular systems. Although the practical problem context is highly random, we have chosen to work here within a deterministic modelling framework. In this context, the control algorithm adapts to new situations as they unfold, but without any anticipation as could a controller derived from stochastic control theory.

The transition from electric power based constraints to data-rate based constraints, allows analyzing these two important variables that are then jointly controlled within the same framework. The theory of optimal control, is used to formulate the problem of optimal transmission resources rigourously. In the original formulation, the problem includes non linear states constraints, which make it particularly difficult. Based on physical considerations, we succeed in linearizing the constraints, without loss of optimality, and subsequently, the linearized constraints are integrated into the dynamics. Constraints on maximum data transmission-rates and the nonnegativity of these variables, are enforced via a suitable penalty mechanism that allows control synthesis in the context of unconstrained linear quadratic regulator theory.

Finally, for a large number N of users, an aggregation theory is developed. It allows the computation of the feedback gains for the N user system via an auxiliary three user system. This is particularly useful for online calculations.

Real time context simulations illustrate the flexibility of our algorithms, and give an idea of the interesting performances achieved.

TABLE DES MATIÈRES

DÉDICACE	iv
REMERCIEMENTS	v
RÉSUMÉ	vi
ABSTRACT	vii
TABLE DES MATIÈRES	viii
LISTE DES FIGURES	xiii
LISTE DES NOTATIONS ET DES SYMBOLES	xvi
INTRODUCTION	xvii
0.1 Motivations	xvii
0.2 Organisation du travail	xix
0.3 Contributions du mémoire	xxi
CHAPITRE 1 NOTIONS DE TÉLÉCOMMUNICATIONS MOBILES . .	1
1.1 Problématique des télécommunications mobiles	1
1.1.1 Propagation des ondes sur la surface terrestre	1
1.1.1.1 Atténuation de parcours	2
1.1.1.2 Ombrage ou Shadowing	2
1.1.1.3 Évanouissement ou Fading	3
1.1.2 Mobilité des usagers	3
1.1.2.1 Hard Handover	3
1.1.2.2 Soft Handover	4
1.1.3 Limitations de la largeur de bande	4

1.2	Historique des systèmes	4
1.2.1	Systèmes primitifs	5
1.2.2	Système de première génération 1G	6
1.2.3	Systèmes de deuxième génération 2G	7
1.2.4	Systèmes de troisième génération 3G	8
1.3	Méthodes d'accès	11
1.3.1	FDMA	12
1.3.2	TDMA	14
1.3.3	CDMA	17
1.3.3.1	Étalement spectral	18
1.3.3.2	Handover	19
1.3.3.3	Multi-chemins	20
1.3.3.4	Contrôle de puissance	20
1.4	Contrôle de puissance dans les réseaux à large bande à haut débit (Multimédias)	22
1.4.1	Revue de la littérature sur les algorithmes de scheduling	22
1.5	Conclusion	25
CHAPITRE 2	RAPPELS SUR LA COMMANDE OPTIMALE	27
2.1	Calcul variationnel	27
2.2	Principe du maximum de Pontryagin	34
2.2.1	Formulation du problème de Pontryagin	35
2.2.2	Le Principe du maximum	36
2.3	Le problème de la commande linéaire quadratique (LQR)	42
2.3.1	La commande LQR	42
2.3.2	Solution de l'équation de Riccati	44
2.3.2.1	Propriétés de la matrice Hamiltonienne dans l'équation de Riccati	47

2.3.2.2	Calcul de la matrice exponentielle de la matrice Hamiltonienne	48
2.3.3	Les différents critères LQR et choix des matrices de pondé- ration Q , R et M	51
2.3.3.1	La commande LQR à horizon infini	51
2.3.3.2	La commande LQR à action terminale	53
2.3.3.3	Sélection des matrices de pondération Q , R , M	60
2.4	Notes sur la commande optimale avec contraintes	62
2.4.1	Contraintes de type égalité sur la commande	62
2.4.2	Contraintes type égalité sur fonction de commande-états	63
2.4.3	Contraintes de type égalité sur les états	64
2.4.4	Contraintes type inégalité sur la commande	65
2.4.5	Contraintes type inégalité sur commande-états	66
2.4.6	Contraintes type inégalité sur les états seulement	67
2.5	Conclusion	69

CHAPITRE 3 ALGORITHME DE CONTRÔLE CONJOINT PUISSANCE- DÉBIT EN LIEN DESCENDANT POUR DEUX USAGERS 70

3.1	Cadre optimal de transmission	71
3.1.1	Nécessité du Scheduling	72
3.1.2	Importance d'opérer à puissance maximale	75
3.2	Modélisation dynamique du système à deux usagers	77
3.2.1	De la contrainte sur les puissances vers une contrainte sur les débits	77
3.2.2	Nature des contraintes	83
3.2.3	Modèle dynamique	86
3.3	Formulation d'un problème de commande optimale sous contraintes	89

3.3.1	Synthèse naïve de la commande optimale (sans tenir compte des contraintes)	91
3.4	Reconsidération du problème de commande optimale avec contraintes et sa résolution	94
3.4.1	Commande optimale à horizon fini sans pondération sur les états ($Q = 0$) et à action terminale	103
3.4.2	Commande optimale à horizon fini à action terminale avec pondération sur les états $Q \neq 0$	112
3.5	Synthèse de la commande par Scheduling	117
3.6	Conclusion	124
CHAPITRE 4 ALGORITHME DE CONTRÔLE CONJOINT PUISSANCE-DÉBIT EN LIEN DESCENDANT POUR LE CAS DE N USAGERS		
4.1	Modélisation du système de lien descendant pour N usagers	126
4.2	Formulation du problème de transmission optimale des données pour N usagers	132
4.2.1	La notion d'utilisateur fictif	139
4.3	Modèle agrégé connexe	142
4.3.1	Système agrégé connexe pour le cas de N usagers ayant les mêmes g_i	144
4.3.2	Système agrégé connexe pour le cas de N usagers ayant des g_i différents	158
4.4	Commande par Scheduling pour N usagers	161
4.5	Algorithme de lien descendant modifié	166
4.5.1	Modification de l'algorithme de lien descendant par redistribution de puissance	167
4.6	Conclusion	171

CHAPITRE 5	TRANSMISSION DES DONNÉES POUR UN NOMBRE	
	D'USAGERS VARIABLE DANS LE TEMPS	172
5.1	Algorithme adaptatif déterministe pour le contrôle temps-réel . . .	173
5.2	Influence d'un nouvel usager	178
5.3	Conclusion	182
CONCLUSION	184
RÉFÉRENCES	187
ANNEXES	191

LISTE DES FIGURES

Figure 1.1	Le système mobile 3G (Jiangzhou, 2001)	9
Figure 1.2	Le système mobile 3G comparé au 2G (Jiangzhou, 2001) . .	10
Figure 1.3	Le système FDMA (Cadoret, 2000)	13
Figure 1.4	Le système TDMA (Cadoret, 2000)	15
Figure 1.5	Le système FTDMA (Cadoret, 2000)	17
Figure 1.6	Le système CDMA (Cadoret, 2000)	18
Figure 2.1	Le calcul variationnel	30
Figure 3.1	Contrainte hyperbolique sur les débits pour deux usagers . .	86
Figure 3.2	Réponse Temporelle des états pour $Q = I_{4 \times 4}, R = I_{2 \times 2}$. . .	93
Figure 3.3	Trajectoire de phase (x_2, x_4) pour $Q = I_{4 \times 4}, R = I_{2 \times 2}$. . .	94
Figure 3.4	Courbe de contrainte modifiée	96
Figure 3.5	Stocks de données pour le cas de deux usagers	110
Figure 3.6	débits de données pour le cas de deux usagers	111
Figure 3.7	Stocks de données pour le cas de deux usagers	116
Figure 3.8	débits de données pour le cas de deux usagers	116
Figure 3.9	Génération d'une fonction pulsée à largeur modulée	119
Figure 3.10	Courbes de stocks de données pour deux usagers avec com- mande pulsée à largeur modulée.	123
Figure 3.11	Courbes des stocks de données avec 5 usagers et un fictif. .	124
Figure 4.1	Stock de données pour le cas de 5 usagers	135
Figure 4.2	Débits de transmission pour le cas de 5 usagers	135
Figure 4.3	Stock de données pour le cas de 5 usagers	137
Figure 4.4	Débits de transmission pour le cas de 5 usagers	138
Figure 4.5	Stock de données pour le cas de 5 usagers avec un usager fictif	141
Figure 4.6	Débits de transmission pour le cas de 5 usagers avec un usager fictif	141

Figure 4.7	Stock de données pour le cas de 15 usagers, calculé à partir du système agrégé.	157
Figure 4.8	Débits pour le cas de 15 usagers, calculé à partir du système agrégé.	157
Figure 4.9	Commande par Scheduling, un usager à la fois	163
Figure 4.10	Étapes de synthèse de la commande par scheduling sur le système d'usagers réels	164
Figure 4.11	Évolution pour 5 usagers avec commande par scheduling . .	165
Figure 4.12	comparaison entre un gros usager et un petit usager	167
Figure 5.1	Schéma conceptuel de l'algorithme temps-réel	175
Figure 5.2	Transmission de données en temps-réel pour 5 usagers avec le bloc continu. Il n'y a aucune nouvelle arrivée sur l'horizon de commande.	177
Figure 5.3	Transmission de données en temps-réel pour 5 usagers avec le bloc de la commande pulsée.	177
Figure 5.4	Transmission de données en temps-réel pour 5 usagers; superposition des trajectoires continues provenant du bloc continu et pulsées provenant du bloc de la commande pulsée. . . .	178
Figure 5.5	Transmission de données en temps-réel pour 5 usagers avec le bloc continu, avec arrivée d'utilisateur à l'instant $t = 5$ et $t = 12$.179	
Figure 5.6	Transmission de données en temps-réel pour 5 usagers avec le bloc de la commande pulsée, avec arrivée d'utilisateurs aux instants $t = 5$, et $t = 12$	180
Figure 5.7	Transmission de données en temps-réel pour 5 usagers. Superposition des trajectoires continues provenant du bloc continu et pulsées provenant du bloc de la commande pulsée, avec arrivées d'utilisateurs aux instants $t = 5$, et $t = 12$	181

Figure 5.8	Influence des nouvelles arrivées sur la trajectoire d'un usager déjà présent.	182
------------	--	-----

LISTE DES NOTATIONS ET DES SYMBOLES

- AMPS: Advanced Mobile Phone System
- CDMA: Code Division Multiple Access
- Fading: (Évanouissement) Attenuation du signal due au phénomène multichemin
- FDMA: Frequency Division Multiple Access
- FTDMA: Frequency and Time Division Multiple Access
- g_i : Atténuation du gain de lien pour l'utilisateur i
- Handoff: Gestion du changement de S.B pour un mobile
- LQR: Linear Quadratic Regulator
- S.B: Station de Base
- SIR: Le rapport signal / bruit
- T_c : Intervalle de temps d'une situation, où les paramètres du système ne varient pas
- TDMA: Time Division Multiple Access

INTRODUCTION

0.1 Motivations

Le besoin de communiquer est une notion très ancienne dans l'histoire des humains. De plus en plus, on assiste à une demande croissante pour acquérir des dernières possibilités de communication d'information, comme la radio, la télévision, l'internet et le téléphone. Ce dernier constitue le moyen le plus utilisé de nos jours, car il permet à deux usagers (parfois plus) de recevoir et d'envoyer de l'information presque instantanément à un coût de plus en plus modique. Partant de ce constat, les opérateurs de téléphones cellulaires, ont compris qu'il était indispensable d'augmenter la capacité d'accueil des correspondants, tout en améliorant les performances.

La troisième génération est justement là pour offrir des besoins de plus en plus croissants, comme une capacité beaucoup plus grande que celle proposées par les réseaux de première et de deuxième génération, et un taux de transfert de données pouvant atteindre jusqu'à $2Mbps$. Toutes ces améliorations ont un prix: il n'est pas facile d'augmenter la capacité d'accueil d'une cellule, à un taux de transfert aussi élevé, sans pour autant détériorer les performances des transmissions. Pour ce faire, des propositions de techniques de gestion des ressources ont sensiblement augmenté dans la littérature des téléphones sans-fil, en vue de garantir une satisfaction croissante dans ces nouvelles conditions.

Le CDMA (Code Division Multiple Access) est la norme qui a été retenue pour la troisième génération, car cette technologie promet une capacité beaucoup plus grande que les autres. Cependant, comme on le sait, le problème fondamental du CDMA se situe au niveau des interférences, car les usagers partagent la même

bande passante. Ainsi, il est important de prendre en compte cette imperfection dans la synthèse des algorithmes de gestion des ressources. Un moyen de quantifier cette grandeur est justement le rapport signal/(bruit + interférences).

Le trafic de nouvelle génération, comporte une part importante de données. Le trafic de données, contrairement au trafic de voix, n'est pas un trafic temps réel, et il est donc possible de retarder sa transmission si ceci améliore les performances du système au niveau efficacité de transmission. Ainsi donc, dans le contexte CDMA, pour un trafic de données, les concepteurs ont introduit la notion de *Scheduling*, qui a pour but d'opérer un seul usager à la fois, à de courts instants (Bedekar, 1999), ce qui diminue sensiblement les interférences qu'il observe; mais de plus, en opérant à puissance maximale pour chaque usager, on optimise le temps de transmission.

Plus récemment, les algorithmes synthétisés ont pris en compte de façon quasi systématique la qualité du canal, qui semblait être la préoccupation de beaucoup de chercheurs. Ce qui a donné naissance à des algorithmes dit *purement opportunistes* (Liu, 2003), qui donnent la priorité aux usagers possédant le meilleur canal. Il s'avère toutefois, que ces algorithmes ont la caractéristique de traiter les usagers de façon systématiquement injuste, ce qui pourrait en décourager certains. On notera enfin qu'il y'a eu des algorithmes qui cherchent à tenir compte des deux aspects, équité et efficacité, mais la majorité des méthodes existantes ont un caractère statique (pas de mémoire dans le système), ce qui pourrait être identifié comme leur faiblesse principale.

On pourra comprendre à travers de ce qui vient d'être dit, qu'il est impératif d'optimiser la gestion des ressources, si on veut à la fois, augmenter le nombre d'utilisateurs, augmenter le débit de transfert de données, en s'assurant que les interférences ne détériorent pas la qualité des appels (surtout vocaux). Pour un trafic de données, dans un contexte CDMA, le scheduling (transmission à un utilisateur à la

fois en courts instants) à puissance maximale, semble être un élément important de la solution. Cependant, la politique d’attribution des ressources aux usagers, se doit d’être un compromis judicieux entre équité et efficacité, et ceci, dans un contexte dynamique (Cao, 2001).

C’est précisément ce que notre travail tente d’apporter à ce champ de recherche où l’activité est intense.

0.2 Organisation du travail

Le chapitre 1, comporte des notions de base de télécommunications mobiles qui permettent de développer les problématiques des communications sans-fil surtout pour le lien descendant (de la station de base vers l’usager). Un bref historique de la discipline est inclus, pour montrer l’évolution vécue jusqu’à ce jour. Enfin, après avoir mis en exergue l’importance de gérer les ressources de façon optimale, une revue de la littérature est fournie, afin de situer l’état de l’art en la matière.

Le chapitre 2, est un chapitre consacré exclusivement à la commande optimale, car la formulation et la solution qui découleront de cette étude, trouvent principalement leur source dans la commande optimale à critère quadratique à horizon fini. Toutefois, nous exposerons les notions de base de cette discipline en partant du calcul variationnel, au principe du maximum, qui servira d’outil à la solution des problèmes de commande optimale linéaire quadratique. On verra par la suite, les différents critères quadratiques connus. Des solutions détaillées à ces problèmes se trouvent dans ce chapitre mais aussi en annexe, comme pour le cas de la commande optimale à horizon infini qu’on trouvera en Annexe II, où nous avons tenté de donner une façon originale de trouver la solution, ou encore les propriétés de la matrice hamiltonienne, qui intervient dans la recherche de la solution du problème quadratique de façon cruciale, et qu’on trouvera en Annexe I. Enfin, une note sur

la commande optimale avec contraintes sur états, un problème en général difficile, est fournie.

Le chapitre 3, concerne l'étude de la gestion des ressources pour le lien descendant, dans le cas de deux usagers. Nous commencerons par voir l'importance d'opérer par scheduling (un usager à la fois), et à puissance maximale, pour réduire les interférences et les temps de transferts. Nous développerons alors, un modèle déterministe et dynamique des transmissions entre la station de base et les deux usagers. Nous formulerons également, le problème de transmission en lien descendant, comme un problème de commande optimale, et discuterons du choix du critère quadratique à horizon fini pour formuler ce problème. Par la suite, nous verrons, comment à partir d'un problème de commande optimale avec contraintes non linéaires sur les états, il est possible de linéariser, sans perte d'optimalité ces contraintes, pour ensuite les intégrer à la description dynamique du système. Enfin les contraintes seront prises en compte par un mécanisme de pénalisation. La commande optimale qui sera implantée sur le système réel, est synthétisée par une technique de scheduling.

Le chapitre 4, est une généralisation du chapitre 3, mettant en jeu cette fois-ci N usagers ($N > 2$). On y trouvera des notions nouvelles, comme celle de l'utilisateur fictif introduite en vue de satisfaire les contraintes sans pénaliser un usager en particulier. Enfin, en vue de rendre possible des calculs d'optimisation en temps réel, pour de grands systèmes, une notion d'agrégation exacte est introduite. Elle permet de ramener le calcul des gains de retour d'état pour le problème de commande optimale à N usagers à celui d'un calcul de commande optimale à 3 usagers seulement.

Au chapitre 5, nous verrons comment tous les algorithmes que nous avons synthétisés lors des chapitres précédents, peuvent être implantés dans une situation

réelle, où nous avons des arrivées intempestives d'utilisateurs et des variations éventuelles de paramètres comme celles des atténuations de liens g_i et des niveaux de stocks de données à transmettre.

Enfin, une conclusion vient faire la synthèse des travaux qui ont été accomplis dans cette étude, pour montrer la pertinence des résultats et des travaux de recherches futurs proposés.

0.3 Contributions du mémoire

- Modélisation déterministe et dynamique des transmissions en lien descendant pour un nombre d'utilisateurs quelconque, et formulation du problème de gestion des ressources de puissance de station de base comme un problème de commande optimale avec critère quadratique, dynamique linéaire, et contraintes non linéaires.
- Réalisation d'un contrôle de puissance pour le lien descendant par scheduling.
- Résolution d'un problème de commande optimale avec contraintes non linéaires sur les états par une approche de pénalisation.
- Introduction de notions nouvelles: un utilisateur fictif dont le rôle principal est de servir à maintenir les contraintes de puissance; une technique d'agrégation d'état limitant la complexité des calculs pour implantation en temps réel.
- Implantation logicielle de contrôleurs linéaires quadratiques à horizon fini, pour le calcul des gains du retour d'états variants dans le temps, sur un système dynamique à dimension variable.
- Implantation logicielle d'un contrôleur par scheduling (fonction pulsée à largeur modulée) sur un système à dimension variable.

- Synthèse d'un algorithme temps-réel, qui permet de transmettre les données à des usagers, indépendamment de leur nombre, de leur position, ou de la quantité de stocks admissibles, et qui prend en charge aussi les arrivées et les départs éventuels des usagers.

CHAPITRE 1

NOTIONS DE TÉLÉCOMMUNICATIONS MOBILES

Dans ce chapitre nous allons exposer quelques notions de télécommunications mobiles afin de situer le contexte pratique de notre recherche.

1.1 Problématique des télécommunications mobiles

La radiocommunication constitue une technique permettant de communiquer avec des abonnés fixes ou en mouvement; cependant la mobilité des usagers peut poser des problèmes difficiles. Dans ce qui suit, nous allons résumer un certain nombre d'entre eux.

1.1.1 Propagation des ondes sur la surface terrestre

La propagation des ondes électromagnétiques sur la surface terrestre se fait par réflexion sur les couches de la surface terrestre vers la basse atmosphère appelée *troposphère* pour revenir sur terre. Cependant, il existe d'autres modes de propagation pour les satellites, qui, par exemple, traversent complètement l'atmosphère. Il faut noter que la propagation peut se faire de plusieurs manières; une caractéristique fondamentale de cette propagation, c'est qu'elle se fait rarement par le biais d'un chemin direct. Le plus souvent, le signal subit des phénomènes de réfraction et autres sur son chemin. Le mobile (ou la station de base) recevra donc des copies multiples du signal suite aux différents chemins empruntés. Ce phénomène est connu sous le nom de *Multipath* en anglais. Ainsi se dégage un certain nombre de

problèmes; on en citera les plus importants.

1.1.1.1 Atténuation de parcours

L'atténuation se manifeste dans plusieurs contextes. On en dénombre trois principaux: la propagation en espace libre, la réflexion, et la diffraction.

- Atténuation de parcours dans l'espace libre: une source envoie une puissance donnée P_t de manière isotrope, vers une antenne équivalente de surface A_r , le long d'une distance d . La puissance reçue se voit atténuée à la valeur:

$$P_r = \frac{P_t A_r}{4\pi d^2}.$$

On peut constater donc que la puissance reçue est inversement proportionnelle au carré de la distance.

- Effet de réflexion: il se manifeste quand l'onde transmise se heurte à un sol plat. Ce dernier fait non seulement réfléchir l'onde, mais l'atténue davantage en faisant intervenir un coefficient de réflexion du sol.
- Effet de diffraction: ce phénomène se produit lorsqu'il y a obstacle entre la station de base et le mobile. Ainsi, ce dernier recevra non pas le signal réel mais plutôt un signal diffracté, ralenti et atténué par le médium traversé (Conan, 2002).

1.1.1.2 Ombrage ou Shadowing

Il arrive souvent dans les zone urbaines que les mobiles soient entourés d'immeubles et de constructions. Ainsi, l'utilisateur, selon sa position, pourrait être plus ou moins

géné pour recevoir ou transmettre son signal, et l'atténuation de puissance qui vient avec se trouve suivre une distribution gaussienne en décibels (Conan, 2002)

1.1.1.3 Évanouissement ou Fading

La propagation des ondes électromagnétiques se fait au ras du sol, et ainsi, des chemins multiples du signal peuvent être empruntés entre la station de base et l'utilisateur (multipath). Ces versions multiples du signal peuvent interférer entre elles pour provoquer des évanouissements (Fading). Celui-ci est de nature dynamique. Ce phénomène dit évanouissement de Rayleigh, peut être très rapide (dizaine de millisecondes), contrairement aux autres phénomènes plus lents (centaines de millisecondes).

1.1.2 Mobilité des usagers

La position des mobiles n'est pas connue à l'avance; d'où existence de protocoles pour la localisation et l'établissement des liens radios, Cette problématique n'existait pas pour les téléphones fixes. Aussi le passage d'une cellule à une autre cellule nécessite une gestion assez importante pour maintenir l'utilisateur en lien. Le *Handoff* est le processus de gestion de ce passage là. Il y a principalement deux types de handoff:

1.1.2.1 Hard Handover

Hard Handover signifie que le lien que l'utilisateur a avec sa station de base initiale, doit être interrompu avant de rentrer dans une nouvelle cellule, suite à ses déplacements. Ce type de Handoff peut-être soit perceptible par l'utilisateur ou pas.

1.1.2.2 Soft Handover

Soft Handover signifie que lors du passage d'un mobile dans une zone commune à deux cellules, il se crée un lien nouveau entre l'utilisateur et la nouvelle station de base potentielle, lien qui se superpose au lien existant. Le lien existant sera lui-même éliminé lorsque sa qualité tombe en deçà d'un certain seuil. La transition n'engendre donc pas de perte totale de lien.

1.1.3 Limitations de la largeur de bande

Les gammes supérieures des VHF (*Very high frequency*) et surtout UHF (*Ultra high frequency*) constituent le meilleur choix dans les applications de communications avec les mobiles. Elles permettent de fonctionner avec des puissances d'émission relativement réduites, même si les antennes compatibles avec les portables doivent être de dimension réduite.

Comme on le sait, la propagation se fait, en général, par le biais d'ondes aériennes et donc les phénomènes de réflexion et de diffraction interviennent. Ceci limite la portée du signal à des distances qui peuvent aller jusqu'à quelques dizaines de kilomètres, bien que les réfractions atmosphériques puissent amener à des distances supérieures par rebonds (Conan, 2002).

1.2 Historique des systèmes

L'idée fondamentale de pouvoir transporter de l'énergie dans l'air (sans-fil) fut énoncée et démontrée par le physicien anglais J.C. Maxwell par le biais de ses célèbres équations vers 1850. Il a fallu attendre l'arrivée de l'ingénieur italien Guillermo Marconi pour voir naître les premières applications commerciales dans le

domaine des télécommunications. Au début, ce fut en quelques centaines de mètres que la transmission se faisait, pour la faire ensuite à travers l'Atlantique entre Cornwall et Capp Cod (Massachusetts) en 1901. Dans la décennie qui suivit, les télécommunications sans-fil furent l'un des domaines les plus essentiels, en passant par des inventions comme la radio, la télévision pour ensuite arriver plusieurs années plus tard au téléphone sans-fil, dont on va voir l'évolution dans différents systèmes (Conan, 2002).

1.2.1 Systèmes primitifs

À la fin des années 1940, les premiers systèmes radio-mobiles commerciaux sont apparus constitués d'une station Radio fixe qu'on appellera désormais *Station de Base* (SB) qui était en lien radio avec les usagers mobiles qu'on appellera par abus de langage *mobiles*. La communication d'un mobile vers la station de base est appelée *lien montant* ou *uplink* en anglais, et celle de la station de base vers l'utilisateur *lien descendant* ou *downlink*, par analogie à leurs hauteurs respectives. Cette transmission se faisait de manière analogique pour la voix et un accès FDMA (Frequency Division Multiple Access) dont on verra plus loin la définition. La station de base était reliée directement au réseau téléphonique commuté classique (fixe).

Ces systèmes possédaient de nombreux désavantages:

- mobilité restreinte, car la puissance d'émission des mobiles était limitée, et la batterie encombrante;
- lorsqu'un mobile en cours d'appel changeait de zone de couverture d'une station de base pour une autre qu'on appelle *Hand-off* l'appel doit être réinitialisé;
- faible capacité, car le nombre de canaux attribués au système était faible

- seule la voix était transmise;
- mauvaise qualité du signal de voix transmis du fait des évanouissements.

1.2.2 Système de première génération 1G

À la fin des années 1970, l'introduction massive de la micro électronique et des microprocesseurs, ainsi que le concept cellulaire caractérisé par la réutilisation des fréquences, donnait naissance aux systèmes de première génération et rendait la technologie de communication avec les mobiles accessible à tout le monde.

Suite aux demandes de Bell, le FCC (Federal Communication Commission) alloue une largeur de bande de 40 MHz entre 800 et 900 MHz. Le premier système de 1G, AMPS (Advanced Mobile Phone System) est un système cellulaire possédant 666 canaux de 30 kHz: les cellules éloignées l'une de l'autre peuvent réutiliser les mêmes fréquences.

On peut donc définir le système cellulaire 1G comme étant un système radio-mobile dont la bande de fréquence d'opération est divisée en canaux fréquentiels discrets, ces derniers étant assignés en différents groupes aux cellules géographiques couvrant la zone de service, pourvu que deux cellules employant les mêmes groupes soient suffisamment éloignées l'une de l'autre.

Les cellules utilisant les mêmes groupes de fréquences généreront des interférences qu'on appelle (*co-channel interference*). L'indice de qualité de la transmission est mesuré par le rapport signal sur interférence $\frac{S}{I}$, et non plus le rapport signal sur bruit $\frac{S}{B}$.

Les principales caractéristiques des systèmes 1G sont:

- Accès par répartition fréquentielle (Frequency Division Multiple Access): chaque canal est identifié par une porteuse distincte.

- La transmission de la voix est analogique (par modulation de fréquence sur la porteuse).
- Des canaux de service sont rajoutés: par exemple le *paging channel* qui permet de savoir si le mobile est capable de recevoir un appel, et l'*access channel* qui permet au mobile de répondre à un message de paging. Ils permettent en plus la gestion des Handoff.
- Le système est relié au réseau téléphonique fixe (*Public Switched Telephone Network*) par le biais d'un commutateur spécialisé (*Mobile Telephone Switching Office*) qui permet aux mobiles de communiquer avec les abonnés du réseau fixe, ou de transiter par ce dernier pour rejoindre un mobile dans une cellule lointaine.

En parallèle au succès du système AMPS, plusieurs pays ont développé leurs propres systèmes sur le même modèle, mais malheureusement bien souvent incompatibles entre eux:

- Japon (Mobile Communication Systems (MCS)): 600 canaux à 25 kHz.
- Pays Nordiques: (Nordic Mobile Telephone (NMT)): 450 MHz, 200 canaux de 25 kHz (Hollande, Luxembourg, Belgique, Autriche).
- Angleterre (Total Access Communication System (TACS)): 1000 canaux de 25 kHz.

1.2.3 Systèmes de deuxième génération 2G

Durant les années 1980, les demandes croissantes en termes de capacité, couverture et qualité de transmission ont abouti au développement des système 2G. Les perfectionnements des technologies numériques, de micro-ondes, circuits intégrés (IC)

et Digital signal processors (DSP) conduisent à utiliser des méthodes numériques pour la transmission de la voix et à inclure des nouveaux services comme le fax, la transmission de données et le fameux SMS (*Short Message Service*). De plus, la technique numérique a permis l'implantation de nouveaux standards de cryptage des données et de prévention de fraude, sécurisant les services.

Les systèmes 2G de radio-mobile cellulaires englobent le GSM (*Global System for Mobile communication*), Digital AMPS (D-AMPS) décrit par les normes IS-54 et IS-136, et le CDMA (*Code Division Multiple Access*) décrit par la norme IS-95. Tous ces systèmes incluent des améliorations comme le contrôle de puissance, une meilleure gestion des Handoff et de l'itinérance globale entre systèmes (*roaming*), ainsi qu'une meilleure efficacité spectrale. Enfin, pour répondre aux besoins des communications sans-fil en résidence ou au travail, de nouveaux systèmes ont vu le jour tels que le PDC (*Personal Digital Communication*) et le DECT (*Digital European Cordless Telecommunication*).

1.2.4 Systèmes de troisième génération 3G

Les mobiles de 3^{ième} génération appelés IMT 2000 sont conçus pour offrir des services à large bande, à des débits de données près de 2 Mbps, pour une qualité semblable au téléphone fixe.

Pour ce faire, de nouvelles technologies d'accès à large bande ont vu le jour comme le WCDMA *Wideband direct sequence Code Division Multiple Access*, qui est la technologie la plus répandue pour les systèmes 3G (CDMA LOGO).

Le WCDMA est conçu pour offrir des services à large bande aussi flexibles que possible, comme l'internet sans-fil, avec un débit maximal de l'ordre de 384 kbps

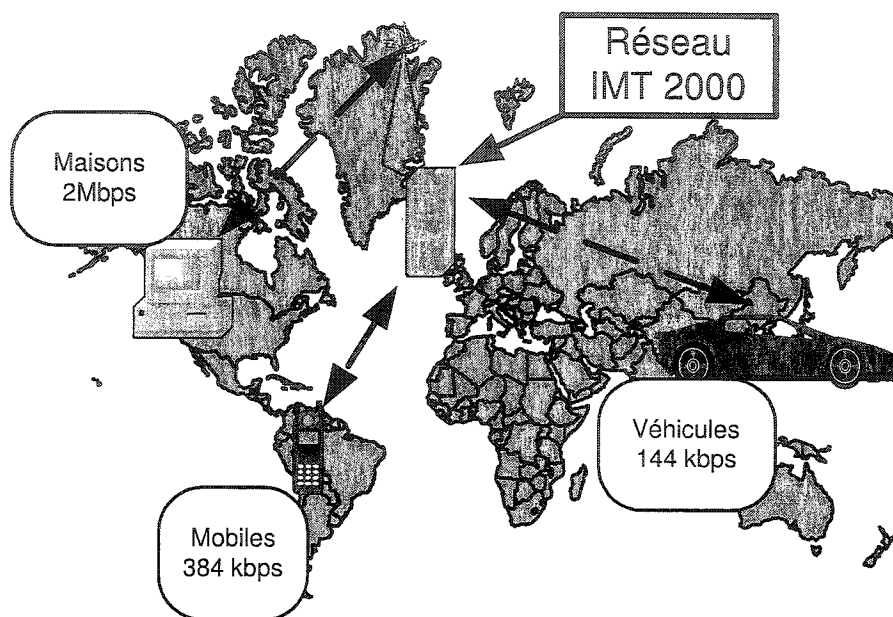


Figure 1.1 Le système mobile 3G (Jiangzhou, 2001)

pour les téléchargements venants du web, et la transmission de vidéo avec un débit maximal qui peut arriver jusqu'à 2 Mbps.

Le transfert de données (le débit des transferts) est l'une des caractéristiques les plus importants de cette technologie à large bande. Les limitations physiques et l'imperfection des canaux radios (contraintes sur la largeur de bande, multipath fading, bruits et interférences) présentent d'importants défis quant à la capacité de réaliser des transferts de qualité à hauts débits.

Quelques caractéristiques intéressantes du WCDMA sont comme par exemple:

- Il permet les opérations entre cellules dans un mode synchrone ou asyn-

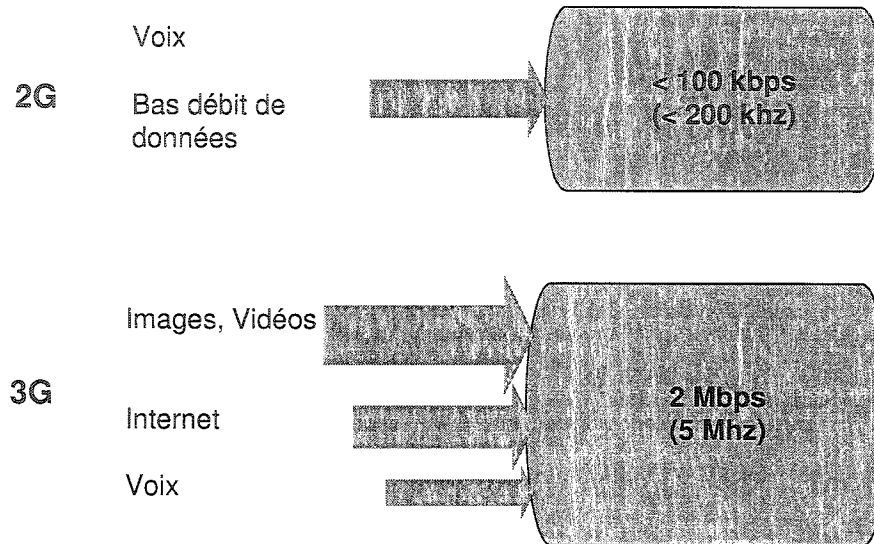


Figure 1.2 Le système mobile 3G comparé au 2G (Jiangzhou, 2001)

chrone (débits variables (adaptatifs) pour les transmissions et les applications avancées).

- Aucune nécessité de rajouter des opérations pour l'acquisition de données d'une cellule à l'autre, comme le GPS qui fonctionne sans déploiement de moyens additionnels dans tous les environnements.
- Débits variables (adaptatifs) de transmission pour les services multimédias, et pour réaliser des débits très hauts, des canaux multiples pour le lien descendant (Downlink Multicodes). Ces derniers sont installés pour le transfert, en parallèle, vers une seule direction.
- Des antennes adaptatives aident à atténuer les sources d'interférences pour maximiser le rapport signal/interférences pour chaque usager. Pour les usagers à haut débit (internet et vidéo) bien que leur nombre ne soit pas très

grand, ils émettent de grandes interférences sur les usagers à faible débit (en particuliers ceux qui utilisent la voix); ainsi sans antennes adaptatives, la capacité du lien est sensiblement réduite.

1.3 Méthodes d'accès

Les principales méthodes d'accès multiples utilisées en télécommunications mobiles sont en nombre de trois:

- Le FDMA (*Frequency Division Multiple Access*),
- le TDMA (*Time Division Multiple Access*),
- le CDMA (*Code Division Multiple Access*).

Toutefois il est possible de trouver des variantes de ces méthodes d'accès comme le TDMA-CDMA (Hybride) selon les besoins du système.

Dans ce contexte, le problème de gestion de ressources, est défini comme suit:

Étant donnée une puissance bien définie, un espace temps -fréquence bien défini, comment pourrait-on allouer des ressources suffisantes, voire optimales au plus grand nombre d'usagers possible dans une station de base donnée, puis dans un réseau donné (plusieurs stations).

En fait les ressources fréquentielles sont disponibles sur deux bandes distinctes l'une pour la communication en lien montant (usager \rightarrow station de base) et l'autre pour les communications en lien descendant (station de base \rightarrow usager).

Si on désire faire parler deux usagers à la fois on a le choix:

- Soit de les faire parler l'un après l'autre (à tour de rôle, il s'agit d'une division temporelle (TDMA));
- Soit de les faire parler en même temps mais sur des fréquences différentes et là le récepteur doit disposer de filtres passe-bande pour pouvoir distinguer les usagers, et il s'agit d'une division fréquentielle (FDMA);
- Enfin, si on donne aux deux usagers toute la bande de fréquence en même temps, mais qu'on les distingue par voie de codage, on utilise à ce moment *toutes les ressources fréquentielles en même temps* et là il s'agit du procédé CDMA (Code Division Multiple Access).

1.3.1 FDMA

Cette technique consiste à donner aux usagers tout le temps une bande de fréquence de grandeur bien définie. Ainsi, s'il y a N usagers, on disposera de N bandes fréquentielles, que ce soit pour le lien montant ou descendant, et entre les bandes de chaque usager on insère une petite bande de séparation qu'on appelle bande de garde pour éviter les inter-fréquences (co-channel), comme le montre la figure 1.3.

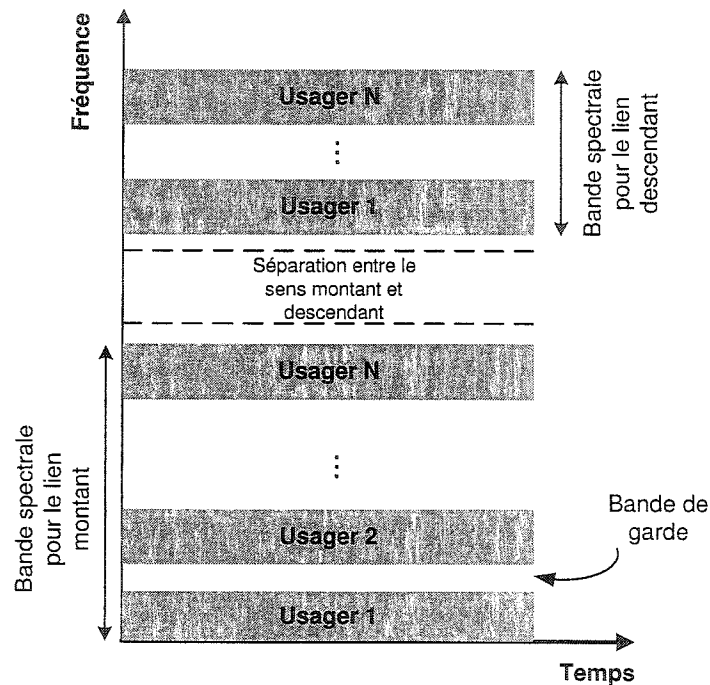


Figure 1.3 Le système FDMA (Cadoret, 2000)

Cette technique fut la première à être utilisée. Elle a connu un grand succès du fait de son implantation facile, et procure des avantages non négligeables comme la réduction des bruits et des interférences du fait de la modulation de fréquence. Cependant plusieurs désavantages sont présents:

- Elle possède une structure statique concernant l'attribution des bandes fréquentielles respectivement largeur de bande et donc il n'y a pas de gestion optimale des ressources fréquentielles en fonction de la situation (exemple: nombre d'utilisateurs dans la station de base, et niveau d'utilisation individuelle

des canaux);

- Du fait que le système soit analogique, l'utilisation de filtres très précis est nécessaire pour sélectionner les bandes désirées pour chaque usager afin d'éviter les interférences entre eux;
- Le phénomène d'évanouissement qui se retrouve toujours dans les communications mobiles est présent de façon dominante, dans des bandes de fréquences bien précises, qui dépendent des positions des usagers. Par ailleurs, si des usagers se voient attribués leur bande de fréquences respectives sur ou autour de cette bande d'évanouissement, la qualité de la transmission se trouvera très diminuée par rapport à celle d'autres usagers se trouvant sur d'autres bandes de fréquences;
- Enfin une dégradation de la qualité des signaux apparaît lors de l'intermodulation des porteuses pour chaque bande de fréquence (chaque usager).

1.3.2 TDMA

Cette technique est venue après celle du FDMA. Elle est apparue lors de la transition entre l'analogique et le numérique.

Elle présente une caractéristique contraire à celle de la précédente dans le sens où on alloue toute la bande de fréquence aux usagers mais chaque usager utilise la bande totale dans un laps de temps appelé en anglais *Slot* à tour de rôle; on sépare chaque slot par un temps de garde, ici aussi, afin d'éviter des recouvrements (superposition de plusieurs signaux identiques) provenant des problèmes de propagation.

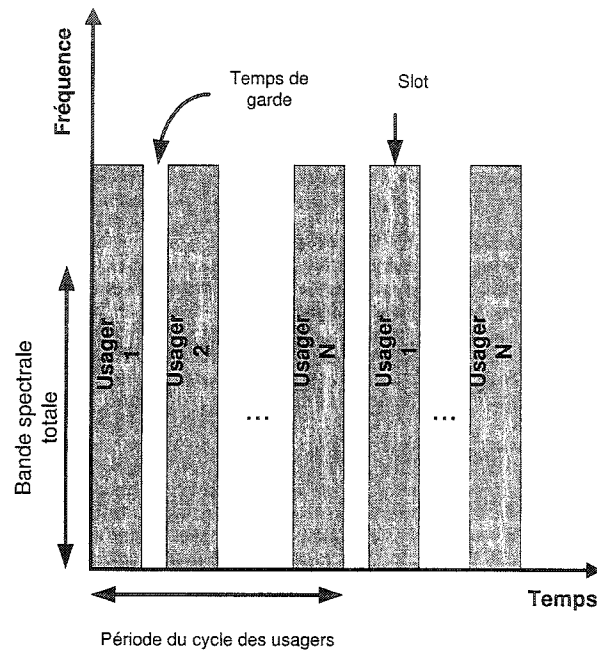


Figure 1.4 Le système TDMA (Cadoret, 2000)

On voit là apparaître une première caractéristique de cette technique qui est le cycle temporel T pour N usagers ayant un débit R bits/sec. Le stock de chaque usager sera placé dans un *buffer* (mémoire tampon), puis sera transmis pendant son slot de durée $(\frac{T}{N})$, avec un débit supérieur à $N.R$ (afin d'envoyer d'autres bits de signalisation propres au fonctionnement du système d'échange, ainsi que pour englober les temps de garde). On peut tout de suite observer la compatibilité de cette technique avec les techniques numériques, et ainsi l'utilisation des filtres passe-bande n'est plus aussi indispensable, contrairement au FDMA où les filtres non seulement étaient indispensables, mais en plus ils devaient être très précis pour

éviter les problèmes qu'on avait cités (il est préférable toutefois d'avoir des filtres dans le TDMA aussi) . Également, la contrainte, nombre de porteuses égal au nombre d'utilisateurs est levée et ainsi le problème d'évanouissement ne crée plus cette injustice sur les utilisateurs car ils occupent tous la totalité de la bande de fréquence. Enfin, la technologie TDMA, procure via la durée des slots une façon dynamique de faire la communication selon le nombre d'utilisateurs existant.

Des désavantages demeurent cependant, et sont à souligner:

- Les utilisateurs ont des délais de propagation différents et variables dans le temps d'où la nécessité de contrôler précisément les passages d'un utilisateur vers un autre afin de préserver l'information.

À ce niveau, on peut constater une certaine correspondance entre le FDMA et le TDMA: pour le premier, dans les filtres passe-bande qui doivent être précis, alors que pour le deuxième, le problème de synchronisation entre utilisateurs est plus délicat.

- La performance du système est dégradée à cause d'une interférence entre des symboles transmis, occasionnées par des retards introduits par les mémoires et par la propagation.

On peut constater à travers de ce qu'on vient de voir que le TDMA et le FDMA ont chacun des avantages et des inconvénients. Le TDMA demeure toutefois bien plus performant que le FDMA.

L'idée d'incorporer les deux techniques en une seule comblerait les inconvénients de chacune, a donné naissance à une méthode d'accès qui est le le FTDMA utilisée dans la norme européenne GSM. La bande totale étant W , est divisée en N sous-bandes (équivalent à N utilisateurs FDMA), et à son tour, chaque bande est divisée en M slots (équivalents à M utilisateurs TDMA) ce qui donne $N.M$ utilisateurs FTDMA.

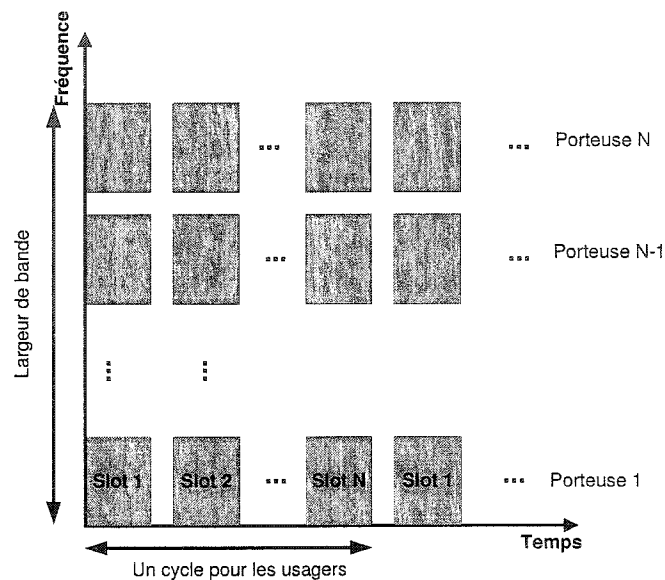


Figure 1.5 Le système FTDMA (Cadoret, 2000)

Cette technologie concurrence celle d'amérique du nord, qu'on va discuter plus bas, le CDMA, dans les systèmes 2G. Cependant, c'est la technologie CDMA qui semble avoir été retenue pour les systèmes 3G.

1.3.3 CDMA

La caractéristique principale du CDMA provient d'une technique militaire appelée l'étalement spectral, qui procure une large bande fréquentielle, assure une discrétion de l'information, permet un nombre plus grand d'utilisateurs et donc un trafic plus grand.

Contrairement aux méthodes FDMA et TDMA, pour lesquelles en vue de recon-

naître un usager où il faut se servir des coordonnées temps-fréquence, le CDMA se sert des propriétés de l'étalement spectral dans cet objectif.

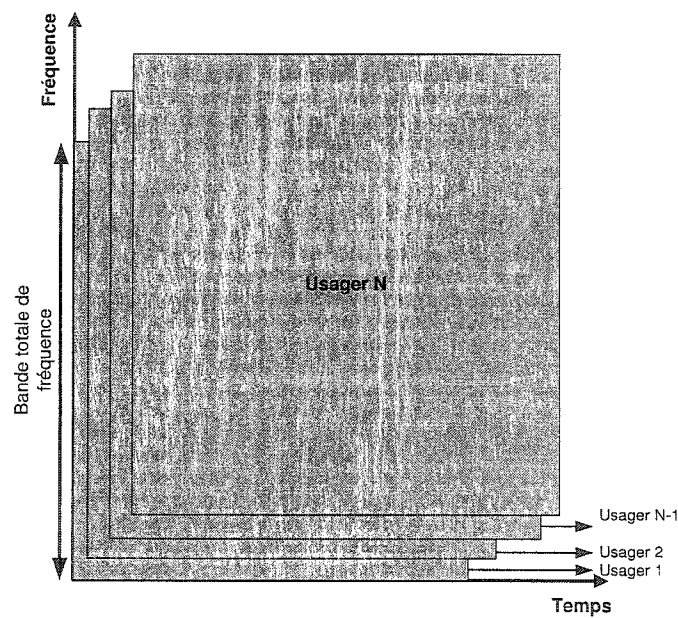


Figure 1.6 Le système CDMA (Cadoret, 2000)

1.3.3.1 Étalement spectral

Considérons un usager émettant à une puissance S Watts avec un débit R bits/sec, et soit W la bande spectrale sur laquelle son signal est étalé (on suppose $W \gg R$). Le canal de propagation utilisé introduit un bruit thermique de densité spectrale de puissance N_o sur toute la bande et une interférence de puissance totale J sur une bande plus petite W_J . Lors de la reconstitution du signal au récepteur, le signal

subit un resserrement spectral, tel que la largeur soit à nouveau R et la densité spectrale de l'interférence $N_J = \frac{J}{W}$, alors que la densité du bruit reste inchangée car il est distribué sur toutes les fréquences (pour plus de détails, voir (Cadoret, 2000)). Ainsi si l'on suppose que $N_J \gg N_o$, alors:

$$\frac{E_b}{N_t} = \frac{E_b}{N_o + N_J} \approx \frac{S/R}{(\nu + J)/W} = \frac{S.W}{(\nu + J).R}$$

La performance du système est définie dans le rapport E_b/N_t qui est l'énergie par bit E_b sur la densité spectrale de l'interférence N_t .

La quantité S/J est le rapport signal/interférence et le ratio W/R est appelé facteur d'étalement spectral. Il constitue le gain principal dans le procédé CDMA. On peut constater que plus W sera grande, et plus le facteur d'étalement spectral sera grand. Le CDMA de la norme IS-95 emploie une bande de 1,25 MHz.

La particularité importante du CDMA réside dans le fait que le réseau est limité par les interférences plutôt qu'en largeur de bande. Ainsi, il peut prendre un nombre d'utilisateurs beaucoup plus grand que les techniques FDMA et TDMA mais alors, ce qu'il faudra surveiller, ce n'est pas le nombre de bandes de fréquence à allouer, mais plutôt le niveau d'interférence additionnel par chaque usager, et ceci en vue de maintenir une bonne performance du système.

1.3.3.2 Handover

Comme on l'a vu en 1.1.2, le handover arrive lorsque l'utilisateur s'apprête à changer de cellule suite à sa mobilité. Dans le cas classique du hard handover, le lien (la connexion) avec la cellule dans laquelle il se trouve est rompu pour établir un nouveau lien avec la nouvelle cellule dont il vient de franchir les frontières. Ceci est appelé en anglais *break-before-make* handover. Dans le CDMA toutes les cellules

utilisent la même bande de fréquences. Il est donc possible d'établir la connexion avec la nouvelle cellule avant même de quitter sa cellule originale. Ceci est appelé *make-before-break*, ou comme on l'a vu soft handover. Cette possibilité de transition graduelle, fait en sorte qu'il n'est pas toujours nécessaire de définir pour le CDMA des zones communes entre cellules aussi importantes que dans les cas TDMA et FDMA, ce qui permet de réduire la densité des cellules requises pour couvrir un territoire donné.

1.3.3.3 Multi-chemins

L'un des grands avantages du CDMA est sa capacité à pouvoir traiter des signaux provenant avec différents retards; Ce phénomène se retrouve dans la transmission multi-chemins (multipath). Le FDMA et le TDMA qui sont à bande étroite, ne peuvent distinguer entre les signaux provenant de chemins différents, ce qui implique une détérioration des performances pour ces systèmes là. Due à sa large bande, le CDMA présente le potentiel de combiner entre les différents signaux provenant du multi-chemins, pour donner un signal fort aux usagers (Zander, 2001).

1.3.3.4 Contrôle de puissance

Le contrôle de puissance des systèmes CDMA tourne autour de la notion d'interférence. En effet, vu que les usagers utilisent les mêmes fréquences (même canal), les interférences internes sont les plus déterminantes pour juger de la capacité du système. Il faudra donc atteindre un niveau minimum γ_{min} de rapport d'énergie par bit sur densité spectrale d'interférences. Ainsi: $E_b/N_o = signal/(interférences + bruits) > \gamma_{min}$.

Imaginons alors le scénario suivant:

Si un usager essaie d'augmenter sa puissance, il va ainsi créer des interférences supplémentaires aux autres usagers, ce qui pourrait impliquer que ces usagers là veuillent augmenter eux aussi leurs puissances pour améliorer la qualité de l'appel; ceci qui impliquerait une augmentation conséquente et brutale des interférences qui aurait pour effet néfaste de détériorer la qualité de l'appel pour tout le monde.

Le contrôle de puissance dans le CDMA a pour rôle principal de contrôler les puissances des usagers ou de la station de base, en vue de satisfaire aux critères de qualités minimaux tout en minimisant les puissances individuelles requises pour ce faire.

On calcul ce rapport de la manière suivante:

Signal / (interférences dues aux autres usagers + auto-interférences + interférences provenant des autres cellules adjacentes + bruit de fond)

$$\frac{E_b}{N_o} = \frac{g_{ik}P_i}{\sum_{i=1, i \neq j}^N g_{ik}P_j\theta_{ij} + \theta_{ij}g_{ik}h_{ik}P_i + I_i + \eta} \quad (1.1)$$

où:

g_{ik} l'atténuation du lien de l'utilisateur i avec sa station de base B_k , P_i est la puissance transmise de la station de base B_k à l'utilisateur i , P_j est la puissance transmise par la station de base locale vers l'utilisateur j différent, modulée par le facteur de lien de l'utilisateur i qui est g_{ik} ainsi qu'un facteur de corrélation orthogonale entre l'utilisateur i et l'utilisateur j qui est $\theta_{ij} \in [0, 1]$; ce dernier témoigne de la non-corrélation orthogonale parfaite qui existe entre les usagers, à cause des effets multi-chemins. $h_{ik} \in [0, 1]$ représente le facteur d'atténuation due à l'auto-interférence.

Cependant, le contrôle de puissance de type données diffère profondément du contrôle dans le cas de la voix, et nécessite une étude plus détaillée, que nous entreprenons dans ce qui suit.

1.4 Contrôle de puissance dans les réseaux à large bande à haut débit (Multimédias)

Le développement continu des télécommunications, combiné à la popularité des applications internet comme le courrier électronique, le transferts de fichiers, ou tout simplement la navigation, nécessitent une gestion optimale des ressources (Borst, 2003) dans les réseaux sans-fils ainsi que des débits de transferts pour les données de plus en plus grands.

Les chercheurs se sont penchés sur la question de procurer les meilleurs algorithmes de gestion de ressources. On en citera les plus récents (Borst, 2003). Le contrôle de la puissance transmise est la clé pour réussir à atteindre une grande fiabilité pour les systèmes CDMA (Agarwal, 2002).

Le contrôle de puissance pour le cas du uplink (lien montant) est nécessaire pour combattre le problème connu sous le nom de *near-far*, et provenant des variations des atténuations associées aux liens des différents usagers à la fois, à cause de leurs positions différentes vis à vis de la station de base, et leur mobilité. Dans le cas du lien descendant (station de base vers mobile), les liens peuvent être partiellement orthogonalisés, mais la gestion d'un important trafic de données dans cette direction rend l'objectif de développement d'algorithmes efficaces de gestion des ressources plus urgente.

1.4.1 Revue de la littérature sur les algorithmes de scheduling

La communication sans fil pose des problèmes qui n'existaient pas dans les communications standards avec fil, comme le changement et la localisation de position des usagers, et la variabilité du canal qui sont les principaux problèmes. Dans le contexte CDMA, le contrôle de puissance devient un objectif essentiel, car il constitue

le moyen principal de limiter les interférences et donc d'augmenter la capacité du réseau. Des tentatives d'appliquer les méthodes standards, avec fil, aux réseaux sans-fil, n'ont pas donné de bonnes performances (Cao, 2001).

Par la suite, on a vu naître des méthodes qui prenaient en compte cette variabilité par des modèles stochastiques markoviens à deux états, la variable valant 1 lorsque le canal est bon, et 0 lorsqu'il est mauvais (Cao, 2001). Cependant l'état du canal est loin de ne vivre que sur ces deux états, car il est souvent dans un état intermédiaire, ce qui est le reproche principal à ce type de méthodes. Il s'est avéré par la suite qu'il était plus intéressant d'inclure l'optimisation du débit comme montré dans (Andrews, 2001)

Les algorithmes de scheduling qu'on retrouve maintenant dans la littérature sont principalement de deux types: des algorithmes qui misent sur l'équité entre les usagers qu'on appelle en anglais *Fair Scheduling* (ordonnancement équitable) et d'autres bien au contraire misant sur les usagers associés aux meilleurs canaux, qu'on appelle en anglais *Opportunistic scheduling* (ordonnancement opportuniste).

Les *algorithmes d'équité* visent donc essentiellement à donner les mêmes privilèges aux usagers en général sans tenir compte de leur situation géographique, ni même de l'état de leur canal, et ainsi la transmission se fait presque, on peut dire, en aveugle tout en garantissant une qualité de service (QoS) intéressante pour tout le monde, sans pour autant atteindre des performances optimales.

Les *algorithmes opportunistes* au contraire, visent à satisfaire les meilleurs usagers (considérés les plus avantageux) en premier, en laissant de côté les autres. Un usager est considéré plus avantageux à un instant donné, si à cet instant, il est associé à un canal de faible atténuation. L'état du canal est variable dans le temps à cause de la mobilité de l'utilisateur qui peut donner lieu à des phénomènes d'évanouissement (fading), soit rapides, soit lents. Les algorithmes opportunistes, tendent à favoriser

les usagers associés au canal de qualité meilleure à un instant donné, soit à cause de leur proximité par rapport à la station de base, soit parce que moins d'obstacles les séparent de cette station. Ils verront leurs paquets envoyés en priorité. Ainsi l'on retiendra que des algorithmes de scheduling opportunistes sont là pour exploiter la variabilité des canaux individuels en vue d'atteindre une plus grande efficacité spectrale. On pourra constater que ces méthodes sont très performantes au niveau de l'utilisation spectrale, et peuvent mener à une répartition équitable de la bande passante parmi les usagers à condition que les canaux (considérés stochastiques) aient la même distribution statistique. Sinon, ils auront tendance à favoriser les usagers les mieux placés, menant par conséquent à un traitement non équitable des autres.

Il est vrai cependant que dans les transmissions de type données, on a besoin d'avoir des pics pour le débit de transmission de plus en plus élevés, contrairement aux transmissions type voix (Akin, 2004), ce qui pourrait par dessus tout justifier ce choix de politique qui donne en fait de bonnes performances en pratique (Joshi et al, 2000). Le manque d'équité demeure tout de même une faiblesse importante. Ces considérations ont mené au développement de méthodes, qui visent le maintien d'une certaine équité. Les objectifs sont recherchés à partir de la définition d'une mesure de performance exigée d'efficacité spectrale et d'équité que nous dénommons *qualité de service* (QoS). Des algorithmes différeront par la nature de cet indice de performance. Nous présenterons dans ce qui suit quelques exemples.

Dans (Andrews, 2001) les auteurs prennent en compte la quantité d'information à transmettre ainsi que l'état du canal et il est optimal au sens du débit.

Dans (Borst, 2001) les auteurs ont mis en place un algorithme de scheduling qui maximise le minimum du débit pondéré des usagers, et là le meilleur usager est défini comme celui qui a le plus grand débit.

Dans (Berry, 2000) le scheduling est fait dans un contexte bien précis où le canal

de l'utilisateur est compromis par le *fading*, et là l'algorithme suggère de donner des puissances et débits variables pour chaque usager selon le niveau de *fading* observé. Cependant, ce genre d'algorithmes peut mener à des attentes très longues.

Dans (Agarwal, 2002) les auteurs étudient le problème de scheduling pour le trafic temps-réel avec temps d'échéance fixé (*deadline*) et le résultat de leur algorithme est de moitié aussi bon qu'un algorithme offline (sachant que ce dernier est le cas idéal); cependant, il est supposé que dans chaque time slot on vide en entier un usager ce qui est restrictif et aussi pourrait induire des files d'attente un peu longues, sans oublier qu'il est indispensable de connaître parfaitement l'état du canal en temps réel, cette dernière hypothèse n'étant pas très pratique.

Dans (Zhang, 2002) les auteurs se penchent sur le développement d'un algorithme de scheduling à mémoire sur les canaux variables dans le temps qui dicte quand il faut transmettre et à quelle puissance, en faisant un compromis entre le débit et l'énergie consommée. Sachant que l'état du canal n'est pas observable directement, la prise de décision est basée sur la connaissance partielle ou incomplète de l'état du canal à partir de la station de base. À la fin de la transmission (à la fin du time slot), et selon de l'état du canal durant les time slots précédents, la transmission peut se voir interrompue pour plusieurs time slots comme le recommande leur algorithme.

Tous les travaux précédents qui tiennent trop spécifiquement compte de l'état du canal peuvent donner des résultats mauvais lorsque le canal est mal connu/estimé. De plus, la mise à jour continuelle nécessaire des valeurs associées aux canaux peut ralentir significativement les algorithmes lors de la prise de décision (Cao, 2001).

1.5 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons vu que le problème majeur du CDMA était celui de l'atténuation des interférences provenant des autres usagers dans la même station

de base. En effet, le fait que les utilisateurs partagent une même bande passante, présente de nombreux avantages, mais rend le contrôle des niveaux d'interférence crucial. D'où l'intérêt de penser à de nouvelles techniques de gestion des ressources. Pour un trafic de données pour lequel il n'est pas nécessaire de réagir instantanément (contrairement à la voix), le scheduling semble être une solution très intéressante, car il fait intervenir un usager à la fois, ce qui permettrait de réduire considérablement les interférences. Cependant, d'autres problèmes de natures parfois commerciales ou sociales peuvent apparaître comme la notion d'équité entre usagers, car là encore, en opérant par scheduling, certains algorithmes vont attribuer des ressources plus grandes aux usagers ayant un meilleur canal, ce qui est efficace d'un certain point de vue, mais à la longue, injuste. De plus, en vue de rendre les algorithmes plus équitables, il est important de garder en mémoire les avantages récents dont a profité un usager particulier; d'où la nécessité d'une modélisation dynamique des transmissions.

Toutes ces considérations portent à croire, qu'il est important, de développer des algorithmes de partage de la capacité de transmission de la station de base dans une cellule qui soient à la fois efficaces, équitables et simples à implanter dans un contexte de téléphonie de troisième génération.

CHAPITRE 2

RAPPELS SUR LA COMMANDE OPTIMALE

Dans ce chapitre, nous allons présenter les éléments essentiels de commande optimale. Elle a trouvé naissance dans le calcul variationnel qu'on verra en premier lieu, qui mène alors à deux théories de base : le principe du maximum dû à Pontryagin, et le principe d'optimalité dû à Bellman, qui mène lui-même aux équations de la programmation dynamique. Nous présenterons uniquement le principe du maximum ici, puisqu'il permet d'intégrer de façon naturelle les contraintes d'état et de commande.

Dans sa forme la plus simple, notre problème d'optimisation des débits d'un système de télécommunication mobile correspond en effet à de la commande linéaire quadratique sous contraintes. C'est pour cette raison que nous développons également les cas particuliers importants de la commande linéaire quadratique sans contraintes d'abord, puis avec contraintes.

2.1 Calcul variationnel

Plusieurs lois de la physique trouvent leur solution par la voie de critères d'optimisation souvent formulés par le biais d'intégrales. Pour en citer une, le principe optique de Fermat qui affirme que la lumière traversant un milieu parcourt un trajet à temps minimal. Un critère de type intégrale, $\int_0^T 1 dt$ est donc minimisé (T , le temps de parcours).

Également, de nombreux résultats en mécanique sont déduits à partir du principe

de minimisation de l'énergie potentielle; en d'autre termes, l'état d'équilibre d'un système mécanique correspond au minimum d'une certaine intégrale du travail induit par les forces actives. Ainsi l'exemple le plus simple est celui la chaîne suspendue de part et d'autre de ses extrémités. La forme de la chaîne est telle que son centre de gravité est le plus bas. Dire que le centre de gravité est le plus bas possible, revient à dire que l'énergie potentielle de la chaîne est minimale.

Tous les problèmes de minimisation d'une fonctionnelle définie par une intégrale de la forme (2.1) contenant des fonctions à déterminer, appartiennent au domaine du *calcul des variations*.

Le problème de calcul de variation est de déterminer une fonction $y(x)$ telle que l'intégrale

$$I = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y') dx \quad (2.1)$$

entre deux points fixes P_0 et P_1 de coordonnées respectives (x_0, y_0) et (x_1, y_1) est minimale. La fonction F dépendant des variables x , y et $y' = dy/dx$ est supposée connue.

Imaginons que les deux points P_0 et P_1 dans le plan xy soient reliés par la courbe $y = f(x)$. En substituant $y = f(x)$ et $y' = f'(x)$ dans (2.1) nous obtenons une intégrale $I(f)$ dont la valeur dépend directement du choix de la courbe $y(x)$.

Posons-nous cette question: Quelle est l'équation de la courbe $y(x)$ joignant P_0 à P_1 qui minimiserait l'intégrale (2.1) ?

Pour répondre à cette question fondamentale, il est important de spécifier certaines

conditions reliées à l'existence d'une telle intégrale et de spécifier dans quelle classe de fonctions nous allons choisir les fonctions qui entrent en compétition pour atteindre le minimum (ou l'infimum) de I .

On supposera que $F(x, y, y')$ est vue comme une fonctionnelle dont les arguments x, y, y' sont des fonctions suffisamment lisses au sens où elles sont supposées, continuellement différentiables d'ordre deux, et nous supposerons avant tout que le problème admet une solution, c'est à dire, qu'il existe une fonction $y = y(x)$ qui minimise l'intégrale (2.1).

Développons dans ce qui suit des conditions nécessaires que doit satisfaire une fonction $y(x)$ lisse et qui minimise (2.1).

Soit $\eta(x)$ une fonction quelconque ayant une dérivée seconde continue, et qui s'annule aux points limites de l'intervalle $[x_0, x_1]$.

Alors

$$\eta(x_0) = 0, \quad \eta(x_1) = 0 \quad (2.2)$$

Si α est un infiniment petit, et variable, on défini:

$$\bar{y}(x) = y(x) + \alpha\eta(x) \quad (2.3)$$

représentent une famille de courbes passant par les points (x_0, y_0) et (x_1, y_1) , puisque la courbe minimisante $y = y(x)$ passe par ces points là et $\eta(x_0) = \eta(x_1) = 0$. Cette situation est décrite à la figure 2.1.

Maintenant si on substitue \bar{y} et \bar{y}' de (2.3) dans y et y' dans l'intégrale (2.1), nous

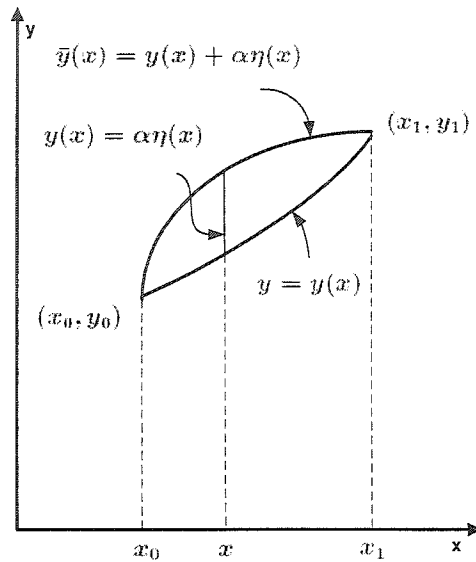


Figure 2.1 Le calcul variationnel

obtenons une fonction de α :

$$I(\alpha) = \int_{x_0}^{x_1} F[x, y(x) + \alpha\eta(x), y'(x) + \alpha\eta'(x)] dx \quad (2.4)$$

Pour $\alpha = 0$, l'équation (2.3) donne $\bar{y}(x) = y(x)$, et puisque $y = y(x)$ minimise l'intégrale (2.1), on conclut donc que $I(\alpha)$ doit avoir nécessairement un minimum pour $\alpha = 0$. Donc la condition nécessaire pour ceci est:

$$\left[\frac{dI}{d\alpha} \right]_{\alpha=0} = 0 \quad (2.5)$$

On peut calculer la dérivée de $I(\alpha)$ en différentiant (2.4) sous le signe intégrale pour obtenir:

$$I'(\alpha) = \int_{x_0}^{x_1} \frac{\partial}{\partial \alpha} F(x, Y, Y') dx, \quad (2.6)$$

avec

$$Y = y(x) + \alpha \eta(x), \quad Y' = y'(x) + \alpha \eta'(x). \quad (2.7)$$

En utilisant la règle de différentiation des fonctions composées,

$$\begin{aligned} \frac{\partial F(x, Y, Y')}{\partial \alpha} &= \frac{\partial F}{\partial Y} \frac{\partial Y}{\partial \alpha} + \frac{\partial F}{\partial Y'} \frac{\partial Y'}{\partial \alpha} \\ &= \frac{\partial F}{\partial Y} \eta(x) + \frac{\partial F}{\partial Y'} \eta'(x). \end{aligned}$$

Ainsi l'équation (2.6) peut être mise sous la forme

$$I'(\alpha) = \int_{x_0}^{x_1} \left[\frac{\partial F}{\partial Y} \eta(x) + \frac{\partial F}{\partial Y'} \eta'(x) \right] dx \quad (2.8)$$

Puisque $I'(0) = 0$ d'après la condition nécessaire, nous obtenons, en remplaçant $\alpha = 0$ dans (2.8)

$$\int_{x_0}^{x_1} \left[\frac{\partial F}{\partial Y} \eta(x) + \frac{\partial F}{\partial Y'} \eta'(x) \right] dx = 0. \quad (2.9)$$

Le second terme dans l'intégrale (2.9) peut être intégré par partie, ce qui donnera:

$$\begin{aligned} \int_{x_0}^{x_1} \frac{\partial F}{\partial y'} \eta'(x) dx &= \left[\frac{\partial F}{\partial y'} \eta(x) \right]_{x_0}^{x_1} - \int_{x_0}^{x_1} \eta(x) \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial y'} \right) dx \\ &= - \int_{x_0}^{x_1} \eta(x) \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial y'} \right) dx, \end{aligned}$$

parce que les conditions aux limites (2.3) annulent le premier terme. On peut enfin écrire (2.9) comme:

$$\int_{x_0}^{x_1} \eta(x) \left[\frac{\partial F}{\partial y} - \left(\frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial y'} \right) \right) \right] dx = 0. \quad (2.10)$$

Mais comme $\eta(x)$ est choisie arbitrairement, s'annulant seulement aux points limites et comme l'intégrale (2.10) doit s'annuler pour n'importe quel choix de $\eta(x)$, il est facile de conclure que:

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial y'} \right) = 0. \quad (2.11)$$

Cette équation est connue sous le nom de *Euler-Lagrange*. Elle est due au mathématicien suisse *Léonhard Euler*, fondateur du calcul variationnel. Le mathématicien français d'origine italienne *Lagrange* figure également ici pour avoir trouvé le premier, ces équations en mécanique, en se basant sur le principe du moindre effort

d'Hamilton.

Si on dérive cette équation, nous obtenons une équation différentielle ordinaire du second ordre.

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y'} - \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial y'} y' - \frac{\partial^2 F}{\partial y'^2} y'' = 0, \quad (2.12)$$

qui permet moyennant conditions initiales et conditions aux frontières de déterminer les fonctions $y(x)$ candidates à la minimisation de l'intégrale (2.1).

Il faut souligner cependant que les solutions à l'équation d'Euler (2.11) peuvent très bien ne pas correspondre à des minima, car il faut se rappeler qu'il s'agit uniquement d'une condition nécessaire pour un extremum. Dans le cas de candidates multiples, des considérations physiques vont venir s'ajouter à l'équation d'Euler, pour rendre la solution unique. Enfin il est utile de rappeler qu'il existe des critères d'optimalité du second ordre qui permettent de trancher quant au caractère de minimum, maximum ou point d'inflexion de la solution. Cependant les solutions analytiques sont très rares.

Un calcul similaire pour l'intégrale

$$I(y) = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) dx \quad (2.13)$$

donne l'équation d'Euler-Lagrange suivante:

$$F_y - \frac{d}{dx} F_{y'} + \frac{d^2}{dx^2} F_{y''} + \dots + (-1)^n \frac{d^n}{dx^n} F_{y^{(n)}} = 0. \quad (2.14)$$

Des approches similaires sont utilisées pour des problèmes variationnel avec des intégrales de surfaces donnant naissance à des *équations de Poisson*.

2.2 Principe du maximum de Pontryagin

Les problèmes de commande optimale peuvent être traités par le calcul variationnel. Cette méthode fournit des conditions nécessaires d'optimalité comme on l'a vu; en particulier, elle nous permet d'obtenir une loi de commande qui peut être de deux types: soit une commande dépendant du temps $u^* = u^*(t)$, soit une loi de commande dépendant des états $u^* = u^*(x)$. La seconde solution, qui présente une rétroaction (*Feedback*), est plus intéressante à avoir d'un point de vue pratique.

Le calcul variationnel est en mesure de traiter des problèmes de commande optimale pour des systèmes en général non linéaires, avec contraintes sur les états et sur la commande (Bryson, 1975).

Le résultat fondamental de la théorie est ce qu'on appelle *Principe du maximum de Pontryagin*.

Le principe du maximum de Pontryagin est un outil très puissant, qui est utilisé pour le design des lois de commande optimale pour une vaste classe de système soumis à des classes de contraintes très diverses. Dans cette section nous allons voir la version simple de cette méthode. Enfin il est utile de noter qu'en général, la loi de commande optimale peut être une fonction discontinue du temps (analytique par morceaux), ce qui introduit des considérations mathématiques assez délicates.

2.2.1 Formulation du problème de Pontryagin

Considérons le système non linéaire suivant, présenté sous la forme d'une équation d'état:

$$\dot{x} = f(x, u), \quad (2.15)$$

avec $x \in \mathbb{R}^n$ et $u \in \mathbb{R}^p$, tels que

$$u(t) \in U \subset \mathbb{R}^p. \quad (2.16)$$

où U est l'ensemble des valeurs admissibles de la commande $u(t)$.

Soit t_0 et $T > t_0$ donnés, et supposons que pour x_0 et x_f fixes:

$$x(t_0) = x_0, \quad x(T) = x_f. \quad (2.17)$$

Définissons la fonction coût suivante:

$$J(x, u, T) = \int_{t_0}^T L(x, u) dt. \quad (2.18)$$

L'objectif est de trouver (si possible) la valeur T^* , la loi de commande u^* dans $[t_0, T]$ et la trajectoire d'état x^* dans $[t_0, T]$ qui satisfont la contrainte équation différentielle (2.15), ainsi que les contraintes (2.16) et (2.17), tout en minimisant la fonction coût (2.18).

Le problème ci-dessus est un problème de commande optimale pour un système non linéaire stationnaire à horizon indéterminé avec conditions aux limites sur les états assignés. Des problèmes plus généraux comme pour les systèmes non stationnaires, avec horizon fixe et un état final libre, peuvent facilement être définis (Sage, 1968).

La fonction coût (2.18) est dépendante des états x , de la commande u et du temps final T . Dans beaucoup d'applications le temps final est fixé à priori. Dans d'autres cas, le temps final est le résultat de l'optimisation, comme dans le cas de la commande optimale sur le temps de déplacement entre un état initial et un état final. Dans notre travail, nous allons déterminer un temps optimal, non pas par optimisation, mais par considérations physiques pour qu'ensuite on se retrouve dans le cas de la commande optimale avec état final fixe.

Le principe du maximum de Pontryagin donne des conditions nécessaires d'optimalité; il peut servir de moyen de vérifier si une solution est optimale, ou encore montrer qu'une solution vérifiant les contraintes (2.15), (2.16) et (2.17) n'est pas optimale.

2.2.2 Le Principe du maximum

Théorème 1 (*Pontryagin*) *Soit (x^*, u^*, T^*) une solution admissible pour le problème de commande optimale considéré. Soit le Hamiltonien du système:*

$$H(x, u, \lambda_0, \lambda) = \lambda_0 L(x, u) + \lambda^T f(x, u) \quad (2.19)$$

Alors $(x^(t), u^*(t), T^*)$ est une solution optimale seulement s'il existe une constante $\lambda_0^* \geq 0$ et un champs de vecteur $\lambda^*(t) \in R^n$, non nuls simultanément pour tout instant $t \in [t_0, T]$, tels que, pour tout $t \in [t_0, T]$, nous avons*

$$\dot{\lambda}^* = - \left[\frac{\partial H}{\partial x} \right]_{(x^*, u^*, T^*)}^T, \quad (2.20)$$

$$H(x^*, \omega, \lambda_0^*, \lambda^*) \leq H(x^*, u^*, \lambda_0^*, \lambda^*) \quad \forall \omega \in U, \quad (2.21)$$

$$H(x^*, u^*, \lambda_0^*, \lambda^*) = 0 \quad (2.22)$$

En plus, des discontinuités sur $\dot{\lambda}^$ arrivent seulement aux instants \bar{t} dans lesquels la commande u^* est discontinue.*

L'inégalité (2.21) décrit le principe du maximum (minimum).

On définit par *extrémale* pour le problème de commande optimale considéré, toute solution admissible qui satisfait la condition nécessaire décrite dans ce théorème. On dit qu'une solution extrémale est *normale* si $\lambda_0^* > 0$. Dans ce cas, sans perte de généralité, on peut supposer que $\lambda_0^* = 1$.

Si le temps final T est fixé, l'équation (2.22) se trouve remplacée par

$$H(x^*, u^*, \lambda_0^*, \lambda^*) = k, \quad (2.23)$$

C'est à dire que la fonction $H(x^*, u^*, \lambda_0^*, \lambda^*)$ est constante, mais pas nécessairement nulle, pour tout $t \in [t_0, T]$.

Si le temps final n'est pas fixé et la fonction coût contient un terme dépendant de l'état final,

$$J(x, u, T) = P(x(T)) + \int_{t_0}^T L(x, u) dt \quad (2.24)$$

alors, comme la condition aux limites $x(T) = x_f$ n'est plus applicable, nous avons besoin de spécifier n autres conditions aux limites. Dans ce cas, ce sont

$$\lambda^*(T) = \lambda_0^* \left[\frac{\partial P(x)}{\partial x} \right]_{(x^*, u^*, T^*)}^T. \quad (2.25)$$

La condition (2.21) est en fait, une condition pour un minimum de la fonction:

$$H(x, u, \lambda_0, \lambda) = \lambda_0 L(x, u) + \lambda^T f(x, u). \quad (2.26)$$

S'il n'y a pas de contraintes sur la commande, cette condition doit être remplacée par la condition triviale

$$\left[\frac{\partial H}{\partial u} \right]_{(x^*, u^*, T^*)}^T = 0. \quad (2.27)$$

Exemple 2.2.1 *Considérons l'exemple classique de minimisation du temps de déplacement d'une position initiale à une position finale, étant donné une contrainte de saturation sur la commande.*

Ainsi, soit le système linéaire

$$\dot{x} = x + u, \quad (2.28)$$

Avec des conditions initiales

$$x(0) = x_0 \quad (2.29)$$

et un état final

$$x(T) = 0. \quad (2.30)$$

Trouver si possible, une commande bornée

$$|u(t)| \leq 1 \quad (2.31)$$

qui emmène l'état de $x(0) = x_0$ vers $x(T) = 0$ en temps minimal.

Dans ce cas la fonction coût est simple

$$J(T) = \int_0^T 1 dt = T. \quad (2.32)$$

Nous considérons seulement les solutions dites normales ($\lambda_0 = 1$). Donc, le Hamiltonien $H(\cdot)$ est

$$H(x, u, 1, \lambda) = 1 + \lambda(x + u). \quad (2.33)$$

Les conditions d'optimalité données par le théorème de Pontryagin sont

$$\dot{\lambda}^* = -\lambda^*, \quad (2.34)$$

$$\lambda^* \omega \geq \lambda^* u^* \quad \forall \omega \in [-1, 1], \quad (2.35)$$

$$H(x^*, u^*, 1, \lambda^*) = 1 + \lambda^*(x^* + u^*) = 0. \quad (2.36)$$

Auxquelles il faut rajouter l'équation d'état (2.28).

En intégrant la première équation (2.34), nous obtenons

$$\lambda^*(t) = \lambda_i e^{-t}. \quad (2.37)$$

Remarquons que $\lambda_i \neq 0$, sinon, il serait impossible de satisfaire la troisième équation (2.36).

De la deuxième équation, nous obtenons alors:

$$u^*(t) = -\text{sign}(\lambda^*(t)) = -\text{sign}(\lambda_i). \quad (2.38)$$

En intégrant l'équation d'état avec la condition initiale donnée, nous obtenons:

$$x^*(t) = x_0 e^t - (e^t - 1) \text{sign}(\lambda_i), \quad (2.39)$$

et, en utilisant la condition sur l'état final, nous avons:

$$x^*(T) = 0 = x_0 e^{T^*} - (e^{T^*} - 1) \text{sign}(\lambda_i). \quad (2.40)$$

Et ainsi, comme résultat nous avons:

$$x_0 = (1 - e^{-T^*}) \text{sign}(\lambda_i), \quad (2.41)$$

ce qui donne:

$$\text{sign}(\lambda_i) = \text{sign}(x_0) \quad (2.42)$$

On conclut donc que:

$$u^*(t) = -\text{sign}(x_0). \quad (2.43)$$

Finalement, le temps optimal est

$$T^* = \log\left(\frac{1}{1 - |x_0|}\right) \quad (2.44)$$

et celui ci est fini seulement si $|x_0| < 1$. Si $|x_0| \geq 1$ il n'existe aucune solution admissible.

Ce résultat peut être obtenu directement à partir de la formule du temps optimal (2.44) où l'intérieur du logarithme doit être nécessairement positif.

2.3 Le problème de la commande linéaire quadratique (LQR)

Le cas de la commande optimale avec critère quadratique est le cas le plus important pour nous dans ce travail. En effet, il constituera notre paradigme de base pour la formulation et la résolution du problème de transmission en lien descendant dans une station de base.

2.3.1 La commande LQR

Le problème LQR est le suivant:

Soit la fonction coût:

$$J(x_0, u) = \min_u \left\{ \int_{t_0}^T [x^T Q x + u^T R u] dt + x^T(T) M x(T) \right\} \quad (2.45)$$

Sous les contraintes:

$$\dot{x} = Ax(t) + Bu(t), \quad x(t_0) = x_0. \quad (2.46)$$

Avec $Q = Q^T \geq 0$, $R = R^T \geq 0$, M matrice constante.

L'objectif, est de déterminer $u^*(t)$, $t \in [0, T]$ tel que $J(x_0, u)$ est minimisée pour toute condition initiale x_0 , c'est à dire

$$J(x_0, u^*) \leq J(x_0, u) \quad (2.47)$$

Pour tout u .

La solution de ce problème peut être obtenue à la fois par programmation dynamique (Dorato, 1995), et à partir du principe du maximum.

Nous présenterons l'approche du principe du maximum.

L'Hamiltonien correspondant au problème LQR posé (2.45-2.46) est:

$$H = L + \lambda^T f = x^T(t)Qx(t) + u^T(t)Ru(t) + \lambda^T(t)(Ax(t) + Bu(t)) \quad (2.48)$$

La commande optimale est obtenue à partir du théorème de Pontryagin:

$$\frac{\partial H}{\partial u} = 0 \Leftrightarrow u(t) = -\frac{1}{2}R^{-1}B^T\lambda(t) \quad (2.49)$$

$$\dot{\lambda}(t) = -\left[\frac{\partial H}{\partial x}\right]_{(x^*, u^*)}^T = -2Qx(t) - A^T\lambda \quad (2.50)$$

Avec comme condition aux limites (2.25):

$$\lambda(T) = \left[\frac{\partial(x^T(T) M x(T))}{\partial x(T)}\right] = 2 M x(T) \quad (2.51)$$

On peut noter à partir de (2.51), que $\lambda(T)$ est une fonction linéaire par rapport à $x(T)$; alors il est intuitif de poser $\lambda(t)$ linéaire par rapport à $x(t)$, ce qui donnerait:

$$\lambda(t) = 2 P(t)x(t) \quad (2.52)$$

Et ainsi, à partir des équations (2.49) et (2.50), il est nécessaire que la matrice carrée $P(t)$ satisfasse:

$$\begin{aligned} -\dot{P} &= A^T P + P A + Q - P B R^{-1} B^T P \\ P(T) &= M \end{aligned} \tag{2.53}$$

qui est l'équation différentielle matricielle de *Riccati*.

En supposant l'existence d'une solution de (2.53), la commande optimale à retour d'état serait donnée par:

$$\begin{aligned} u^*(t) &= -K(t)x(t); \\ K(t) &= R^{-1}B^T P(t) \end{aligned} \tag{2.54}$$

On constate qu'il s'agit bien d'un retour d'état linéaire, variant dans le temps.

Dans la solution de notre problème de commande optimale à multi-usagers chapitre 4, nous verrons que l'équation de Riccati jouera un rôle primordial. De ce fait, nous allons donner certaines de ces propriétés techniques ainsi que sa résolution (Zhou, 1996), (Dorato, 1995).

2.3.2 Solution de l'équation de Riccati

L'équation de Riccati est non linéaire. Cependant elle possède un certain nombre de propriétés. Il est en effet possible moyennant un changement de base, de se retrouver dans un cadre linéaire dans des dimensions deux fois plus grandes (Dorato, 1995).

Posons une solution de la forme:

$$P(t) = Y(t)X^{-1}(t) \quad (2.55)$$

Soit le système linéaire suivant

$$\begin{bmatrix} \dot{X}(t) \\ \dot{Y}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H_{11} & H_{12} \\ H_{21} & H_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X(t) \\ Y(t) \end{bmatrix} \quad (2.56)$$

Déterminons les H_{ij} qui vérifieraient l'équation de Riccati.

En écriture distribuée nous obtenons:

$$\begin{aligned} \dot{X}(t) &= H_{11}X(t) + H_{12}Y(t) \\ \dot{Y}(t) &= H_{21}X(t) + H_{22}Y(t). \end{aligned} \quad (2.57)$$

D'après (2.55)

$$\dot{P}(t) = \dot{Y}(t)X^{-1}(t) + Y(t)\dot{X}^{-1}(t), \quad (2.58)$$

mais comme $XX^{-1} = I$ alors $\dot{X}X^{-1} + XX^{-1} = 0$, d'où:

$$\dot{X}^{-1} = -X^{-1}\dot{X}X^{-1}. \quad (2.59)$$

On remplace (2.59) dans (2.58) pour trouver

$$\frac{d(YX^{-1})}{dt}(t) = -YX^{-1}\dot{X}X^{-1} + \dot{Y}X^{-1}. \quad (2.60)$$

On remplace (2.57) dans (2.60)

$$\begin{aligned}\frac{d(YX^{-1})}{dt} &= -YX^{-1}[H_{11}X + H_{12}Y]X^{-1} + [H_{21}X + H_{22}Y]X^{-1} \\ &= -YX^{-1}H_{11} - YX^{-1}H_{12}YX^{-1} + H_{21} + H_{22}YX^{-1}.\end{aligned}\quad (2.61)$$

Ce qui donne finalement en se rappelant de (2.55)

$$-\dot{P} = PH_{11} - H_{22}P - H_{21} + PH_{12}P. \quad (2.62)$$

Par identification avec (2.53) nous aurons à poser:

$$\begin{aligned}H_{11} &= A \\ H_{12} &= -BR^{-1}B^T \\ H_{21} &= -Q \\ H_{22} &= -A^T,\end{aligned}\quad (2.63)$$

d'où finalement le système différentiel linéaire:

$$\begin{bmatrix} \dot{X} \\ \dot{Y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & -BR^{-1}B^T \\ -Q & -A^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix}, \quad (2.64)$$

avec comme condition finale (2.53)

$$\begin{bmatrix} X(T) \\ Y(T) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I \\ M \end{bmatrix}, \quad (2.65)$$

Et la solution de l'équation de Riccati est bien comme dans (2.55) $P(t) = Y(t)X(t)^{-1}$.

On appelle $H = \begin{bmatrix} A & -BR^{-1}B^T \\ -Q & -A^T \end{bmatrix}$ *matrice Hamiltonienne*. Nous verrons quelques unes de ces propriétés.

Si les matrices A, B, Q et R sont variables dans le temps, il est alors difficile, voire impossible d'obtenir une solution analytique, mais dans le cas contraire, où les matrices sont invariantes dans le temps, il est possible d'obtenir une solution analytique par le biais de la matrice de transition.

$$\begin{bmatrix} X(t) \\ Y(t) \end{bmatrix} = e^{H(t-t_0)} \begin{bmatrix} X(t_0) \\ Y(t_0) \end{bmatrix}. \quad (2.66)$$

En posant $T = t_0$, (2.66) nous donne:

$$\begin{bmatrix} X(t) \\ Y(t) \end{bmatrix} = e^{-H(T-t)} \begin{bmatrix} X(T) \\ Y(T) \end{bmatrix} \quad (2.67)$$

qui est la solution temporelle qui dépend de l'instant final T qui est connu, et non pas de l'instant initial t_0 dont la condition est inconnue. Voyons comment il serait possible de calculer cette matrice exponentielle en utilisant les propriétés de la matrice Hamiltonienne développé au 2.3.2.1.

2.3.2.1 Propriétés de la matrice Hamiltonienne dans l'équation de Riccati

1. Si $\lambda \in \sigma(H)$ alors $-\lambda \in \sigma(H)$ ($\sigma(H)$ représente le spectre de la matrice H)
2. Si (A, B) est commandable et $(A, Q^{\frac{1}{2}})$ est observable, alors la matrice Hamiltonienne H n'admet pas de valeurs propres sur l'axe imaginaire et elle pos-

sède n valeurs propres dans le demi-plan gauche, et n valeurs propres dans le demi-plan droit.

3. En vertu de la propriété 2, il existe une transformation non singulière $T = \begin{bmatrix} T_1 & 0 \\ 0 & T_2 \end{bmatrix}$, telle que:

$$\begin{bmatrix} A & -BR^{-1}B^T \\ -Q & -A^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Lambda_s & 0 \\ 0 & \Lambda_i \end{bmatrix}$$

et Λ_s, Λ_i , sont les blocs de Jordan respectivement associés aux n valeurs propres stables, et aux n valeurs propres instables.

Preuve: voir annexe I.

2.3.2.2 Calcul de la matrice exponentielle de la matrice Hamiltonienne

On a donc:

$$T^{-1}HT = \begin{bmatrix} \Lambda_s & 0 \\ 0 & \Lambda_i \end{bmatrix}$$

où Λ_s est une matrice de Jordan $n \times n$ qui regroupe toutes les valeurs propres ayant une partie réelle négative (partie stable), et Λ_i est une matrice de Jordan $n \times n$ qui regroupe le reste des valeurs propres, c'est à dire, les valeurs propres à partie réelle positive (partie instable), alors que les matrice T a été partitionnée en correspondance avec les sous-matrices Λ_s et Λ_i de Λ , soit:

$$T \equiv \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \end{bmatrix}.$$

Notons que $\begin{bmatrix} T_{11} \\ T_{21} \end{bmatrix}$ est la matrice des vecteurs propres généralisés de H associés aux valeurs propres stables, et $\begin{bmatrix} T_{12} \\ T_{22} \end{bmatrix}$ est la matrice des vecteurs propres généralisés de H associés aux valeurs propres instables. Donc avec la transformation

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} = T \begin{bmatrix} \tilde{X} \\ \tilde{Y} \end{bmatrix}, \quad (2.68)$$

l'équation différentielle matricielle (2.64) devient:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \tilde{X} \\ \tilde{Y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Lambda_s & 0 \\ 0 & \Lambda_i \end{bmatrix}. \quad (2.69)$$

Il faudra cependant ne pas confondre entre la matrice T qui sert de matrice de passage et le temps final qui est noté aussi T . La différence se verra facilement dans le contexte d'utilisation.

On trouve donc la solution

$$\begin{aligned} \tilde{X}(T) &= e^{\Lambda_s(T-t)} \tilde{X}(t) \\ \tilde{Y}(T) &= e^{\Lambda_i(T-t)} \tilde{Y}(t) \end{aligned} \quad (2.70)$$

En évaluant (2.68) à l'instant T et en se souvenant de (2.65) on obtient:

$$I = T_{11}\tilde{X}(T) + T_{12}\tilde{Y}(T) \quad (2.71)$$

$$M = T_{21}\tilde{X}(T) + T_{22}\tilde{Y}(T)$$

(2.71) donne:

$$\tilde{Y}(T) = G\tilde{X}(T) \quad (2.72)$$

avec

$$G = -[T_{22} - MT_{12}]^{-1}[T_{21} - MT_{11}] \quad (2.73)$$

(2.68), (2.70) et (2.73) permettent de trouver $X(t)$ et $Y(t)$ pour enfin obtenir à partir de (2.55):

$$P(t) = [T_{21} + T_{22}e^{-\Lambda_i(T-t)}Ge^{\Lambda_s(T-t)}] [T_{21} + T_{22}e^{-\Lambda_i(T-t)}Ge^{\Lambda_s(T-t)}]^{-1} \quad (2.74)$$

Il faut noter que cette solution est toujours possible à déterminer analytiquement dans la mesure où la matrice Hamiltonienne ne possède aucune valeur propre sur l'axe imaginaire, i.e., quand la paire (A, B) est stabilisable et la paire $(A, Q^{\frac{1}{2}})$ est détectable d'après la propriété (2) de cette matrice. Notons enfin que pour le cas

d'un système variant dans le temps, cette solution n'est plus valable.

2.3.3 Les différents critères LQR et choix des matrices de pondération Q , R et M

Dans cette partie, nous allons voir un certain nombre de critères quadratiques qui interviennent régulièrement dans les applications. On commencera par un cas particulier très intéressant qui est celui de la commande quadratique à horizon infini qu'on surnomme souvent LQ et qui est cependant la solution du régime permanent de l'horizon fini.

2.3.3.1 La commande LQR à horizon infini

Le problème de la commande optimale à horizon infini est le suivant

$$\min_u J(x_0, u) = \int_0^{+\infty} [x^T(t)Qx(t) + u^T(t)Ru(t)] dt \quad (2.75)$$

Sous la contrainte du système dynamique

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \quad x(0) = x_0 \quad (2.76)$$

On supposera que

1. (A, B) est commandable,
2. $(A, Q^{\frac{1}{2}})$ est observable,

$$3. Q = Q^T \geq 0,$$

$$4. R = R^T > 0.$$

Le problème est de trouver (si possible) $u^*(t), t \in [0, \infty[$ telle que $J(x_0, u)$ est minimisée pour toute condition initiale x_0 , i.e.

$$J(x_0, u^*) \leq J(x_0, u) \quad (2.77)$$

pour tout u .

Il faut noter que le problème LQR à horizon infini peut ne pas admettre de solution si l'une des hypothèse (1 et 2) n'est pas satisfaite contrairement au problème à horizon fini qui admet toujours une solution.

Puisque (A, B) est commandable, alors il existe par définition une commande qui fasse déplacer l'état initial x_0 de n'importe quelle place dans l'espace d'état vers la solution $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0$, et cette commande peut-être ne serais-ce la comande du Grammien $u_0(t) = -B^T e^{-A^T t} W_c^{-1} x_0$, avec le Grammien de commandabilité $W_c = \int_0^\infty e^{-A\tau} B B^T e^{-A^T \tau} d\tau$, ceci nous assure que l'ensemble des commandes admissibles n'est pas vide, donc ça vaut la peine de chercher la solution optimale parmi d'autres. cependant cette commande est loin d'être optimale car elle ne fait intervenir en aucun cas la minimisation du critère, mais en plus, la commande est en boucle ouverte.

On peut définir l'ensemble des commande admissibles:

$$U = \{u_{[0, \infty[} : \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0\}$$

La solution à ce problème est bien simple, mais sa construction l'est un peu moins,

nous donnerons ici juste la solution, et la construction qu'on propose de donner, se trouve en annexe II.

La solution est:

$$u(t) = -K x(t) \quad (2.78)$$

avec

$$K = R^{-1} B^T P \quad (2.79)$$

et la matrice P doit être la solution définie positive satisfaisant l'équation algébrique de Riccati suivante:

$$PA^T + AP - PBR^{-1}B^TP + Q = 0. \quad (2.80)$$

La solution peut être obtenue de plusieurs manières encore une fois, on peut facilement reprendre le même chemin qu'on avait pris pour l'horizon fini afin de déterminer la solution qu'on dit de régime permanent. Plutôt que de reprendre les mêmes étapes, donnons une autre plus originale qu'on a montée qu'on trouvera dans l'annexe II, mais avant cela voyons un certain nombre de points intéressants.

2.3.3.2 La commande LQR à action terminale

Il est souvent souhaitable de s'intéresser aux états non pas spécialement sur toute la trajectoire mais seulement à la fin, i.e., quand $t \rightarrow T$. Ce type de contrôle s'appelle

Commande optimale à action terminale. On pourrait observer a priori cette action dans le critère d'optimisation en reprenant le critère quadratique, avec $Q = 0$ (la trajectoire d'état ne nous intéresse pas spécialement), et $M = \infty.I$ pour forcer les états à aller à zéro à l'instant final (écraser la trajectoire à l'instant final). Donc si on reprend le problème LQR à action terminale

$$\min_u J(x_0, u) = \int_0^T u^T R u \, dt + x^T(T) M x(T). \quad (2.81)$$

avec

$$M = \infty.I$$

Sous la contrainte

$$\dot{x} = Ax + Bu \quad x(0) = x_0.$$

Étant donné que $Q = 0$, alors l'équation de Riccati devient

$$\begin{aligned} -\dot{P} &= A^T P + P A - P B R^{-1} B^T P, \\ P(T) &= \infty.I \end{aligned} \quad (2.82)$$

Si nous voulons résoudre cette équation, il est important de remarquer la difficulté de manipuler des termes infinis, et pour ce faire, nous allons faire le changement de variable suivant

$$S = P^{-1} \quad (2.83)$$

Donc $S(T) = 0$, qui est plus commode à manipuler. Ainsi

$$\frac{dP^{-1}}{dt} = -P^{-1}\dot{P}P^{-1}$$

donne finalement:

$$\dot{S} = SA^T + AS - BR^{-1}B^T \quad (2.84)$$

avec

$$S(T) = 0$$

On remarque déjà un point important suite au changement de variable, c'est que non seulement nous avons éliminé le terme infini de l'équation, mais de plus, nous avons transformé l'équation de type Riccati qui est non linéaire en une équation linéaire, connue sous le nom *d'équation de Lyapunov*, et dont on va voir la résolution analytique.

Solution de l'équation de Lyapunov:

Nous allons exposer deux solutions de l'équation de Lyapunov dont on donnera les démonstrations

Méthode 1

Soit l'équation différentielle de Lyapunov

$$\dot{S} = SA^T + AS - BR^{-1}B^T \quad (2.85)$$

Utilisons la technique de variation de la constante pour la résoudre, mais tout d'abord résolvons l'équation suivante

$$\dot{S}(t) = AS + SA^T \quad (2.86)$$

Observons que cette équation à l'allure d'une dérivée d'un produit de matrices. Voyons comment allons nous extraire la solution via les deux équations suivantes:

$$\begin{aligned} \dot{S}_1(t) &= AS_1 \\ \dot{S}_2(t) &= S_2A^T. \end{aligned} \quad (2.87)$$

Elle admettent comme solution respectivement:

$$\begin{aligned} S_1(t) &= e^{A(t-t_0)} S_{10} \\ S_2(t) &= S_{20} e^{A^T(t-t_0)}, \end{aligned} \quad (2.88)$$

et comme on l'a dit plus haut, la solution proposée pour l'équation (2.86), serait le produit $S(t) = S_1(t)S_2(t)$; c'est à dire:

$$S(t) = e^{A(t-t_0)} S_0 e^{A^T(t-t_0)} \quad (2.89)$$

Vérifions que (2.89) est bien solution de (2.86)

$$\dot{S}(t) = Ae^{A(t-t_0)}S_0e^{A^T(t-t_0)} + e^{A(t-t_0)}S_0A^Te^{A^T(t-t_0)}$$

Mais comme A^T et A^T commutent alors A^T et $e^{A^T(t-t_0)}$ commutent aussi et donc on aura $A^Te^{A^T(t-t_0)} = e^{A^T(t-t_0)}A^T$ et ainsi l'équation (2.86) est bien vérifiée.

Si on veut utiliser la méthode de variation de la constante pour résoudre l'équation (2.85), on posera alors la solution globale de cette équation comme étant

$$S(t) = e^{A(t-t_0)}S_0(t)e^{A^T(t-t_0)} \quad (2.90)$$

Donc en remplaçant (2.90) dans (2.85) on trouve

$$\begin{aligned} \dot{S}(t) &= Ae^{A(t-t_0)}S_0(t)e^{A^T(t-t_0)} + e^{A(t-t_0)}\dot{S}_0(t)e^{A^T(t-t_0)} + e^{A(t-t_0)}S_0(t)A^Te^{A^T(t-t_0)} \\ &= AS(t) + S(t)A^T + e^{A(t-t_0)}\dot{S}_0(t)e^{A^T(t-t_0)}. \end{aligned}$$

Il serait nécessaire d'avoir

$$e^{A(t-t_0)}\dot{S}_0(t)e^{A^T(t-t_0)} = -BR^{-1}B^T.$$

D'où finalement:

$$S_0(t) = S_0 - \int_{t_0}^t e^{-A(\tau-t_0)}BR^{-1}B^Te^{-A^T(\tau-t_0)}d\tau. \quad (2.91)$$

En injectant (2.91) dans (2.90) on trouve finalement

$$S(t) = e^{A(t-t_0)} S_0 e^{A^T(t-t_0)} - \int_{t_0}^t e^{A(t-\tau)} B R^{-1} B^T e^{A^T(t-\tau)} d\tau \quad (2.92)$$

Méthode 2

Nous allons montrer comment il est possible de résoudre l'équation de Lyapunov via *l'algèbre de Kronecker*. On trouvera dans (Zhou, 1996) une méthode pour résoudre des équations algébriques comme celle de *Sylvester*, on s'est inspiré de cette équation pour résoudre celle de Lyapunov.

Définissons tout d'abord les opérations de base de cette algèbre.

Soient deux matrices $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$ et $B \in \mathbb{C}^{p \times q}$, alors le *produit de Kronecker* de A et B désigné par \otimes , est défini par

$$A \otimes B = \begin{bmatrix} a_{11}B & a_{12}B & \cdots & a_{1n}B \\ a_{21}B & a_{22}B & \cdots & a_{2n}B \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}B & a_{n2}B & \cdots & a_{nn}B \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{mp \times nq}$$

De plus, si les matrices sont carrées; $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ et $B \in \mathbb{C}^{m \times m}$, la *somme de Kronecker* est désignée par \oplus , et elle est définie par

$$A \oplus B = (A \otimes I_m) + (I_n \otimes B) \in \mathbb{C}^{nm \times nm}.$$

Soit $X \in \mathbb{C}^{m \times n}$, et soit $vec(X)$ le vecteur formé des vecteur de X placés dans une seule colonne comme suit

$$vec(X) = \begin{bmatrix} x_{11} \\ x_{21} \\ \vdots \\ x_{m1} \\ x_{12} \\ x_{22} \\ \vdots \\ x_{1n} \\ x_{2n} \\ \vdots \\ x_{mn} \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{m \times n \times 1}$$

Un résultat intéressant des produits de Kronecker est le suivant:

$$(A \otimes B) \cdot (C \otimes D) = A \cdot C \otimes B \cdot D. \quad (2.93)$$

Un autre résultat important des produit de Kronecker est le suivant:

$$vec(AXB) = (B^T \otimes A)vec(X) \quad (2.94)$$

Donc si on applique (2.94) sur l'équation (2.85) on trouve

$$\begin{aligned}
vec(\dot{S}) &= vec(AS) + vec(SA^T) + vec(-BR^{-1}B^T) \\
vec(\dot{S}) &= (I \otimes A) vec(S) + (A \otimes I) vec(S) + vec(N) \\
vec(\dot{S}) &= (A \oplus A) vec(S) + vec(N),
\end{aligned} \tag{2.95}$$

avec

$$N = -BR^{-1}B^T. \tag{2.96}$$

On retrouve un système d'état dynamique classique dont la solution est bien connue

$$vec(S) = e^{(A \oplus A)(t-t_0)} vec(S_0) + \int_{t_0}^t e^{(A \oplus A)(t-\tau)} vec(N) d\tau \tag{2.97}$$

2.3.3.3 Sélection des matrices de pondération Q, R, M

Nous allons donner brièvement quelques lignes de conduites qui permettent de choisir a priori les matrices de pondération Q, R, M . On a utilisé le mot a priori, car en effet, la première règle à retenir, c'est qu'aucun choix de matrices de pondération dans la commande LQR n'est définitif, dans le sens où il faut agir par essais-erreurs pour pouvoir régler les performances désirées. Cependant, des recherches ont été faites dans ce sens pour justement développer des méthodes qui aident à choisir ces matrices voir (Anderson, 1990). Principalement, ces méthodes s'inspirent de raisonnements fréquentiels souvent graphiques, pour juger dans quelle direction il faut aller, chose qui est peu intéressante dans un algorithme temps-réel comme dans notre cas. Ainsi pour des raisons d'efficacité, il est préférable dans ce cas, d'apprendre comment le système évolue avec les pondérations, et d'essayer de dégager une loi qui "restera" valable tout le temps, pour tout changement impor-

tant dans le système comme la variation des paramètres, des conditions initiales ou encore de la dimension du système. Les grandes lignes à retenir sont les suivantes:

- Il est préférable d'utiliser des matrices diagonales pour pouvoir modifier le comportement des variables d'une manière découplée.
- Si on désire écraser certaines variables i.e., les maintenir proches de zéro dans l'intervalle de temps, il est recommandé de choisir des matrices ayant des composantes de plus en plus grandes.
- Si on désire écraser les états à l'instant final en particulier, il suffit d'appliquer ce qu'on vient de dire au point ci-dessus, mais d'une manière plus ciblée et plus drastique, i.e., choisir $M = \infty I$.
- Si nous désirons que la commande n'agisse pas brutalement, i.e., en commençant par des valeurs pas trop grandes et arrivant à zéro doucement, il est suggéré de choisir $R = \rho I$, avec ρ assez grand. Dans le cas inverse, si on veut que la commande atteigne zéro plus rapidement, il est suggéré de prendre ρ plus petit.
- Éviter de choisir des matrices ayant des valeurs singulières trop différentes, car cela pourrait impliquer des matrices mal conditionnées, ce qui impliquerait des erreurs numériques importantes comme dans les inversions de matrices. On notera au passage que le moyen de vérifier le conditionnement d'une matrice se trouve dans ce qu'on appelle *L'indice de condition* défini par $\kappa = \frac{\sup(\sigma(A))}{\inf(\sigma(A))}$ où $\sigma(A)$ est la valeur singulière de A .
- Enfin il faut noter que toutes ces indications ne sont pas absolues, et qu'il est nécessaire, de les vérifier par simulation pour voir en effet si elles correspondent vraiment à ce qu'on attend. En somme, le cycle essai-vérification est inévitable.

2.4 Notes sur la commande optimale avec contraintes

Dans cette partie, nous allons exposer brièvement les stratégies de commande optimale en prenant présence cette fois-ci de contraintes. Celles-ci sont de deux types principalement: les contraintes de type égalité, et les contraintes de type inégalités. Dans les deux cas, on suppose des formes explicites mettant en jeu seulement la variable de contrôle, avec la variable de contrôle et des variables d'états, et enfin le type de contrainte le plus difficile à gérer est celui qui ne concerne que les états. Dans tous les cas, le principe du maximum fournit les conditions nécessaires d'optimalité. Voici le formalisme tel que rapporté dans (Bryson, 1975).

2.4.1 Contraintes de type égalité sur la commande

Reprenons le problème de commande optimale

$$\min J(x, u, T) = \int_{t_0}^T L(x, u) dt,$$

soumis aux contraintes

$$\dot{x} = f(x, u, t) \quad x(t_0) = x_0 \in \mathbb{R}^n,$$

$$C(u, t) = 0, \tag{2.98}$$

où $u(t) \in \mathbb{R}^m$, avec $m \geq 2$ (si $m = 1$, le problème d'optimisation devient trivial à cause de l'égalité).

Une façon de traiter cette contrainte, c'est de l'adjoindre à la fonction hamiltonienne avec un multiplicateur de Lagrange $\mu(t)$, comme suit:

$$H = L + \lambda^T f + \mu C \quad (2.99)$$

Et la condition d'optimalité qui se rajoute

$$0 = \frac{\partial H}{\partial u} = \frac{\partial L}{\partial u} + \lambda^T \frac{\partial f}{\partial u} + \mu \frac{\partial C}{\partial u} \quad (2.100)$$

En résolvant l'équation (2.100) avec celle (2.98), nous obtenons $(m+1)$ conditions pour déterminer les m éléments de $u(t)$, ainsi que le multiplicateur de Lagrange $\mu(t)$.

2.4.2 Contraintes type égalité sur fonction de commande-états

Considérons le même problème que le précédent, mais avec la contrainte:

$$C(x, u, t) = 0. \quad (2.101)$$

De la même manière que plus haut, nous allons adjoindre la contrainte à la fonction Hamiltonienne,

$$H = L + \lambda^T f + \mu C, \quad (2.102)$$

ce qui donne

$$0 = \frac{\partial H}{\partial u} = \frac{\partial L}{\partial u} + \lambda^T \frac{\partial f}{\partial u} + \mu \frac{\partial C}{\partial u}. \quad (2.103)$$

Nous obtenons l'équation d'Euler modifiée,

$$\dot{\lambda}^T = -\frac{\partial H}{\partial x} = -\frac{\partial L}{\partial x} - \lambda^T \frac{\partial f}{\partial x} - \mu \frac{\partial C}{\partial x} \quad (2.104)$$

Toutes les autres équations demeurent les mêmes; Les équations (2.101) et (2.103) représentent $(m+1)$ équations pour $(m+1)$ quantités u, μ à déterminer.

2.4.3 Contraintes de type égalité sur les états

Si maintenant, nous avons à faire à des contraintes qui ne comportent pas explicitement la commande u , un degré de difficulté s'ajoute dans le sens où nous n'avons pas de contrôle direct sur les états, mais indirect via la commande. Ainsi, considérons la contrainte

$$S(x, t) = 0 \quad (2.105)$$

Cette contrainte est active sur l'intervalle de temps $[t_0, T]$ et doit donc avoir une différentielle totale nulle sur toute la trajectoire d'état.

$$\begin{aligned}
dS &= \frac{\partial S}{\partial t} dt + \frac{\partial S}{\partial x} dx = 0, \\
\frac{dS}{dt} &= \frac{\partial S}{\partial t} + \frac{\partial S}{\partial x} \dot{x} = 0, \\
\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{\partial S}{\partial x} f(x, u, t) &= 0.
\end{aligned} \tag{2.106}$$

Si (2.106) devient une forme explicite en u , alors il est possible d'utiliser le résultat du cas des contraintes type égalité sur commande-variable, sinon, on opère une nouvelle différentiation. Ainsi cette opération est répétée jusqu'à aboutissement à une forme explicite de la commande c'est à dire (2.101). Si celle-ci se produit au q ième ordre, nous appellerons cette contrainte *la contrainte d'ordre q type égalité sur les états*. Et dans ce cas la dérivée q ième jouera le même rôle que (2.101).

2.4.4 Contraintes type inégalité sur la commande

Supposons maintenant, que nous ayons une contrainte type inégalité sur la commande

$$C(u, t) \leq 0. \tag{2.107}$$

Si nous définissons le Hamiltonien $H = L + \lambda^T f + \mu^T C$, la condition nécessaire sur H donne:

$$\frac{\partial H}{\partial u} = \frac{\partial L}{\partial u} + \lambda^T \frac{\partial f}{\partial u} + \mu^T \frac{\partial C}{\partial u} = 0$$

qui est la même que celle de la contrainte type égalité. Cependant, avec une

condition supplémentaire

$$\begin{aligned}\mu &\geq 0, \quad C = 0 \\ \mu &= 0, \quad C < 0.\end{aligned}\tag{2.108}$$

Cette condition se trouve dans le même type de raisonnement que la condition de *Karush-Kuhn-Tucker* (Gauvin, 1995), pour montrer les contraintes actives et non actives.

2.4.5 Contraintes type inégalité sur commande-états

Regardons maintenant le cas de contraintes type inégalités sur la commande et les états

$$C(x, u, t) \leq 0,\tag{2.109}$$

Ce problème sera traité de la même manière que le cas des contraintes inégalités sur la commande. On définit de nouveau

$$H = L + \lambda^T f + \mu C,$$

avec

$$\begin{aligned}\mu &\geq 0, \quad C = 0 \\ \mu &= 0, \quad C < 0.\end{aligned}\tag{2.110}$$

et les équations d'Euler-Lagrange deviennent

$$\dot{\lambda}^T = -\frac{\partial H}{\partial x} = \begin{cases} -\frac{\partial L}{\partial x} - \lambda^T \frac{\partial f}{\partial x} - \mu \frac{\partial C}{\partial x}, & C = 0, \\ -\frac{\partial L}{\partial x} - \lambda^T \frac{\partial f}{\partial x}, & C \leq 0 \end{cases} \quad (2.111)$$

L'équation qui détermine $u(t)$ est:

$$\frac{\partial H}{\partial u} = \frac{\partial L}{\partial u} + \lambda^T \frac{\partial f}{\partial u} + \mu \frac{\partial C}{\partial u} = 0. \quad (2.112)$$

Pour $C < 0$, nous avons $\mu = 0$, et (2.112) détermine $u(t)$. Pour $C = 0$, les équations (2.109) et (2.112) permettent de déterminer $u(t)$ et $\mu(t)$; sachant que $\mu(t)$ est nécessaire pour (2.111).

2.4.6 Contraintes type inégalité sur les états seulement

Voyons enfin, le cas de contraintes type inégalités sur les états seulement.

$$S(x, t) \leq 0 \quad (2.113)$$

Comme pour le cas de la contrainte de type égalité sur les états, nous opérerons des dérivées successives afin d'obtenir une forme de contraintes explicite en $u(t), x(t)$, puis en substituant à chaque fois $f(x, u, t)$ à la place de \dot{x} . Donc si nous faisons q dérivations, nous aurons une contrainte de la forme $S^{(q)}(x, u, t)$, la q ième dérivée de S , qui jouera le même rôle que $C(x, u, t)$ dans le cas de la contrainte type inégalité sur la commande-états. L'Hamiltonien devient donc

$$H = L + \lambda^T f + \mu S^{(q)}, \quad (2.114)$$

Où

$$S^{(q)} = 0 \text{ sur la frontière,} \quad S = 0, \quad (2.115)$$

$$\mu = 0 \text{ dans l'ensemble de contraintes} \quad S < 0. \quad (2.116)$$

Les équations d'Euler-Lagrange demeurent les mêmes que celle du cas $C(x, u, t)$, avec $S^{(q)}$ au lieu de $C(x, u, t)$.

La condition nécessaire pour l'obtention de $\mu(t)$, est également la même.

Il est à noter que toutes ces méthodes fournissent des conditions *nécessaires* seulement. D'autres travaux ont vu le jour en vue d'obtenir des conditions nécessaires et suffisantes pour résoudre le problème de contraintes. Nous citerons en particulier (Zeidan, 1994), où l'auteure procède par étapes en posant un problème équivalent qu'elle appelle *Un problème accessoire*, qui est par la suite associé à beaucoup de conditions pour arriver à l'unicité. Ces méthodes, donnent en général naissance à des commandes optimales difficiles à calculer, linéaires par morceaux et à l'occasion discontinues, ce qui n'est pas souhaitable dans certaines applications. Nous verrons plus loin dans le chapitre 3, que plutôt que d'utiliser les approches ci-dessus, nous avons eu recours à une méthode d'imposition des contraintes par pénalisation de violation de ces dernières, dans la fonction coût.

2.5 Conclusion

La commande optimale, permet de résoudre des problèmes de nature différentes. Le critère d'optimisation semble être le point de départ le plus important. Le cas de la commande linéaire à critère quadratique est particulièrement important en pratique vu l'existence de solutions analytiques aisément implantables, et pouvant couvrir nombre d'objectifs différents moyennant un réglage judicieux des pondérations dans le critère. Les problèmes de commande optimale deviennent plus compliqués lorsqu'il y a présence de contraintes, surtout si celles-ci sont non linéaires. Des conditions nécessaires existent pour résoudre ce genre de problèmes délicats, mais être en mesure d'en tirer une solution est une autre question. De plus, même si une solution peut être obtenue, il n'est pas garanti qu'elle soit implantable au niveau pratique, soit à cause de la complexité des calculs requis en temps réel, soit parce qu'elle viole certaines contraintes non modélisées au départ. Dans ce contexte, l'analyse physique du problème, dès le départ, joue un rôle essentiel.

CHAPITRE 3

ALGORITHME DE CONTRÔLE CONJOINT PUISSANCE-DÉBIT EN LIEN DESCENDANT POUR DEUX USAGERS

Dans ce chapitre, nous allons considérer le cas d'une cellule munie d'une station de base qui dessert deux usagers.

Nous proposerons un modèle de transmission déterministe basé sur des considérations dynamiques de la théorie des systèmes. Nous énoncerons le problème sous forme d'un problème de commande optimale, d'abord avec contraintes sur les états, et par la suite, à partir d'une reformulation adéquate, nous pourrions éviter de traiter directement les contraintes. Mais établissons tout d'abord, qu'il est plus intéressant d'opérer par scheduling pour transmettre les données aux usagers (c'est à dire en se concentrant sur un usager à la fois) et de plus, non pas à une puissance quelconque, mais toujours à la puissance maximale.

Soit une cellule comportant une station de base B_k munie d'une puissance maximale P_{max}^k qui dessert N usagers. Nous noterons par $P = [P_1, P_2, \dots, P_N]^T$ le vecteur de puissance allouée pour chaque usager pour le lien descendant, et désignerons le gain de lien entre l'utilisateur i et la station de base B_k par $g_{i,k}$.

Nous adopterons en premier lieu un modèle standard pour la transmission où le débit transmis à chaque usager, est fonction de la puissance transmise par la station de base.

Soit W la largeur de bande du système, et R le débit de transmission vers l'utilisateur. Si P est la puissance reçue par l'utilisateur de sa propre station de base et I est l'ensemble de toutes les interférences et bruits observés par le mobile, alors le

rapport énergie par bit versus densité spectrale de bruit E_b/N_o est donné par (Berggren, 2000) et (Zander, 2001):

$$\frac{E_b}{N_o} = \frac{WP}{RI} \quad (3.1)$$

Pour que l'utilisateur puisse décoder le signal de la station de base avec une probabilité d'erreur ϵ acceptable, il est nécessaire d'avoir $E_b/N_o \geq \gamma$ avec $\gamma = \gamma(\epsilon)$ une borne inférieure déterminée par l'erreur ϵ qui garantit un niveau de satisfaction adéquat pour un type de codage donné.

Ainsi l'expression du débit maximal associé à P , est donnée par:

$$R = \frac{WP}{\gamma I} \quad (3.2)$$

On peut donc dire que le débit maximal pour une bonne transmission dépend de la puissance attribuable à l'utilisateur; elle dépend également des interférences dues aux autres usagers, des bruits mais aussi du niveau de satisfaction γ . Plus γ est grand, plus le débit maximal permis sera limité.

3.1 Cadre optimal de transmission

Les deux caractéristiques importantes de la transmission dans le lien descendant, se trouvent dans les deux propriétés qui sont: le scheduling, où il est préférable de communiquer avec un usager à la fois et en second lieu, la transmission au débit maximal, lui-même associé à l'utilisation de la puissance maximale disponible. La présentation est inspirée de (Bedekar, 1999)', et nous y établirons ces deux

propriétés.

3.1.1 Nécessité du Scheduling

Cette section a pour but de montrer sous certaines conditions qu'il est optimal pour la station de base de transmettre à un seul usager (de type données) à la fois, plutôt que de transmettre à tous les usagers en même temps.

Si nous considérons la station de base B_k qui a pour puissance maximale P_{max}^k constante, celle-ci se décompose en puissance allouée pour les usagers de type voix P_v^k et une puissance pour les usagers de type données P_D^k avec :

$$P_{max}^k = P_v^k + P_D^k \quad (3.3)$$

Pour l'utilisateur i type données, il recevra une portion de puissance $\phi_i^k P_D^k$ avec $\phi_i^k \leq 1$ et $\sum_{i \in B_k} \phi_i^k = 1$. Concentrons-nous sur l'utilisateur de type données.

L'utilisateur i subit des interférences de la part des autres usagers dans sa station qu'on appelle *interférences intra-cellules*. Également, il produit du bruit sur ses propres communications qu'on appelle *Auto-interférence*. À cela, se rajoutent les interférences des usagers de type voix. On écrira donc:

interférences = Auto-interférences + interférences intra-cellules type données + interférences usagers de type voix + interférences inter-cellules + bruit de fond (bruit blanc).

$$\text{Auto-interférences} = \theta_i^k h_i^k \phi_i^k P_D^k g_i^k,$$

$$\text{interférences intra-cellules type données} = \theta_i^k (1 - \phi_i^k) P_D^k g_i^k,$$

$$\text{interférences intra-cellules d'usagers de type voix} = \theta_i^k P_v^k g_i^k,$$

interférences inter-cellules $= I_i^k = \sum_{k \in \Omega} P_{max}^k g_i^k$

$\Omega_B = \{\text{ensemble des stations de base } B_k \text{ ayant une puissance maximale respective } P_{max}^k\}$, où:

θ_i^k : facteur d'orthogonalité qui représente la fraction de puissance transmise par la station de base vers les usagers autres que i , qui agit comme interférence sur l'utilisateur i lui-même. Si la station de base utilise des codes orthogonaux pour transmettre à différents usagers, alors les interférences intra-cellules sont virtuellement éliminées quand le canal est gaussien, ce qui correspond à $\theta_i^k = 0$. Cependant, comme le phénomène du multi-chemins est toujours présent, ce type d'interférences n'est réduit que partiellement, ce qui implique que $\theta_i^k \in]0, 1]$.

$\theta_i^k h_i^k$: le coefficient d'auto-interférences ou bruit; on prendra $h_i^k \leq 1$ ce qui signifie que pour un niveau de puissance donné, transmise vers l'utilisateur i , ce dernier subira une interférence dans le pire des cas égale à celle qu'il aurait subie si cette puissance était destinée à un seul usager différent.

g_i^k : est le facteur d'atténuation, en valeur absolue, entre l'utilisateur i et la station de base k .

Nous obtenons enfin l'expression des interférences comme suit:

$$I_i = I_i^k + \theta_i^k h_i^k \phi_i^k P_D^k g_i^k + \theta_i^k (1 - \phi_i^k) P_D^k g_i^k + \theta_i^k P_v^k g_i^k \quad (3.4)$$

En remplaçant l'expression des interférences (3.4) dans l'expression du débit (3.2), nous obtenons:

$$R_i^k = \frac{W}{\gamma} \frac{\phi_i^k P_D^k g_i^k}{I_i + \theta_i^k [h_i^k \phi_i^k P_D^k + (1 - \phi_i^k) P_D^k + P_v^k] g_i^k + \eta} \quad (3.5)$$

η : est le bruit de fond qu'on retrouve toujours et qu'on peut considérer comme constant.

Supposons maintenant qu'on alloue à l'utilisateur i toute la puissance P_D^k durant un court intervalle de temps de fraction temporelle ϕ_i^k . En d'autres termes, ϕ_i^k est utilisé comme facteur de partage de temps plutôt que de puissance comme ce fut le cas plus haut. On constatera par ailleurs que la quantité de données qui est transmise est conservée selon le cas où ϕ_i^k est un facteur de partage de temps ou de puissance; nous aurons donc la même quantité de données que l'utilisateur recevra en moyenne, donc la même puissance P_D^k . Ceci implique que les autres usagers (spécialement de type voix) observeront le même niveau d'interférences, puisque la puissance de l'utilisateur i est conservée en moyenne. Donc d'après le schéma de scheduling où on partage le temps, on peut constater qu'aucun usager n'est défavorisé mais en plus durant cette période de temps où la station de base transmet uniquement à l'utilisateur i , aucune puissance n'est allouée aux autres usagers dans la cellule, et ainsi *l'utilisateur i ne reçoit aucune interférence de la part des autres usagers* de type données de la même cellule. Le débit reçu durant cette période (*slot*) est donc donné par:

$$R_i^{slot} = \frac{W}{\gamma} \frac{P_D^k g_i^k}{I_i + \theta_i^k [h_i P_D^k + P_v^k] g_i^k + \eta}. \quad (3.6)$$

Puisque l'utilisateur i reçoit ce débit durant une fraction d'intervalle ϕ_i^k , puis ne reçoit rien du tout pour le reste de l'intervalle d'opération, il s'en suit que le débit par intervalle de fonctionnement est $\phi_i^k R_i^{slot}$ en moyenne.

Si nous comparons les deux stratégies, nous trouvons le rapport entre les deux débits:

$$\begin{aligned}
\frac{R_i}{\phi_i^k R_i^{tot}} &= \frac{I_i + \theta_i^k [h_i \phi_i^k P_D^k + (1 - \phi_i^k) P_D^k + P_v^k] g_i^k + \eta}{I_i + \theta_i^k [h_i P_D^k + P_v^k] g_i^k + \eta} \\
&= 1 + \frac{\theta_i^k [P_D^k + (1 - \phi_i^k) P_D^k] g_i^k}{I_i + \theta_i^k [h_i P_D^k + P_v^k] g_i^k + \eta} \\
&= 1 + \left\{ \frac{\theta_i^k g_i^k P_D^k (1 - h_i) (1 - \phi_i^k)}{I_i + \theta_i^k [h_i P_D^k + P_v^k] g_i^k + \eta} \right\}_{positif} \geq 1
\end{aligned} \tag{3.7}$$

Donc

$$\frac{R_i(classique)}{R_i(scheduling)} \geq 1. \tag{3.8}$$

S'il n'y a qu'un seul usager type données, ou s'il y'a orthogonalité parfaite et sans multi-chemins ($\theta_i^k = 0$), également, si $h_i = 1$, alors le rapport des débits vaut 1 et dans ce cas il n'y a clairement aucune différence entre les deux stratégies.

Dans le cas contraire on peut constater que l'énergie par bit divisée par la densité d'interférences et bruits $(E_b/N_o)_{classique} < (E_b/N_o)_{scheduling}$, puisque $R_i(classique) > R_i(scheduling)$ pour un même niveau d'interférence moyen. On peut donc affirmer *qu'il est plus avantageux de transmettre à un usager à la fois plutôt qu'à plusieurs en même temps.*

3.1.2 Importance d'opérer à puissance maximale

Dans le paragraphe précédent, nous avons montré qu'il est optimal de transmettre à un usager à la fois, plutôt qu'à tous en même temps, afin de réduire les interférences sur chaque usager. Cependant, nous n'avons en aucun cas indiqué à quelle puissance on transmet, ou encore quelle est la puissance de transmission la plus optimale. Quel impact aura le niveau de puissance transmise ?

Replaçons nous selon le même scénario qu'au paragraphe précédent, sur un intervalle où l'utilisateur qui nous intéresse est le seul à recevoir de la puissance de la station

de base. Si nous considérons seulement des usagers de type données $P_v^k = 0$ et de plus, nous négligeons l'auto-interférence ($h_i = 0$), (3.6) donne:

$$R_i = \frac{W}{\gamma} \frac{P^k g_i^k}{I_i + \eta} \quad (3.9)$$

avec I_i les interférences des autres cellules.

Supposons que la station de base B_k fournisse la puissance maximale P_{max}^k durant une fraction de temps P^k/P_{max}^k et durant le reste de l'intervalle une puissance nulle, alors la puissance que reçoit l'utilisateur i est là encore conservée en moyenne, et ainsi, les mêmes niveaux d'interférences seront observées pour lui et pour les autres usagers. Donc en opérant à puissance maximale, nous venons de démontrer que nous ne dégradons pas le niveau d'interférences observé. Mais en plus, dans l'équation (3.9), tous les termes, excepté $P^k = \phi_i^k P_D^k$, sont indépendants de la puissance P_D^k fournie par la base: ceci parce qu'en opérant dans un mode de scheduling, on élimine les interférences internes à la cellule. Il s'ensuit que si la station de base opère systématiquement au niveau maximum P_{max}^k de puissance disponible, le débit R_i sera maximisé et le temps requis pour transmettre une quantité fixe de données sera minimisé. Ainsi, en conclusion, la transmission en mode "scheduling" (un usager à la fois) minimisera les pertes d'énergie sans conséquences directes sur les durées de transmission des données, alors que l'utilisation de la puissance maximale disponible à la station de base minimisera le temps de transmission pour un volume de données à transmettre fixe. Plus loin, nous utiliserons ces observations en vue de circonscrire utilement la classe de commandes de puissance admissibles.

3.2 Modélisation dynamique du système à deux usagers

Dans ce paragraphe, nous allons proposer un modèle dynamique pour le vidage des données basé sur les modèles d'état, avec des contraintes physiques, nous commencerons par le cas de deux usagers, qui est l'objet de ce chapitre.

3.2.1 De la contrainte sur les puissances vers une contrainte sur les débits

Soit une station de base avec une puissance maximale P_{max} , et deux usagers type données associés à une répartition de puissance telle que:

$$P_1 + P_2 = P_T \quad (3.10)$$

Pour toute la suite, nous ferons des raisonnements sur une station de base, on omettra les indices k relatifs à la station de base. On posera également les définitions suivantes:

$$P_D^k = P_{max}$$

qui est la puissance maximale allouée aux usagers de type données, on négligera donc les usagers de type voix.

$$\begin{aligned} \phi_i P_{max} &= P_i, \\ (1 - \phi_i) P_{max} &= \sum_{j=1, j \neq i}^N P_j. \end{aligned}$$

qui représentent, la puissance de l'utilisateur i et le reste des puissances disponible dans la station de base.

On définit donc le rapport signal / (bruit + interférences) de chaque utilisateur i par:

$$SIR_i = \frac{\text{puissance de l'utilisateur } i \text{ dans son lien}}{\text{interf intra-cellules} + \text{auto-interférence} + \text{interf intercellules} + \text{bruit de fond}}.$$

Soit, en général:

$$SIR_i = \frac{g_i P_i}{\sum_{j=1, j \neq i}^N \theta_i g_i P_j + \theta_i h_i P_i + I_i + \eta}; \quad (3.11)$$

Et d'après l'expression (3.2), le débit maximal permissible est:

$$R_i = \frac{W}{\gamma} SIR_i. \quad (3.12)$$

Sans perte de généralité, il est possible de négliger l'effet de l'auto-interférence pour la suite (Bedekar, 1999), (Berggren, 2000). Dans le cas contraire, son effet sera de *baissier le débit maximal de chaque usager, tout en conservant la forme mathématique de la contrainte.*

Pour le cas de deux usagers, on aura:

$$R_1 = \frac{W}{\gamma} \frac{g_1 P_1}{\theta_1 g_1 P_2 + I_1 + \eta}, \quad (3.13)$$

$$R_2 = \frac{W}{\gamma} \frac{g_2 P_2}{\theta_2 g_2 P_1 + I_2 + \eta}. \quad (3.14)$$

De ces deux expressions, on peut extraire respectivement la puissance de l'utilisateur en fonction des débits et de la puissance de l'autre usager:

$$P_1 = \frac{\gamma}{W} \frac{\theta_1 P_2 g_1 + I_1 + \eta}{g_1} R_1, \quad (3.15)$$

$$P_2 = \frac{\gamma}{W} \frac{\theta_2 P_1 g_2 + I_2 + \eta}{g_2} R_2. \quad (3.16)$$

En injectant dans les expressions (3.15), (3.16) l'expression de la puissance totale (3.10) $P_2 = P_T - P_1$ et $P_1 = P_T - P_2$ on trouve:

$$P_1 = \frac{\gamma}{W} \frac{\theta_1 (P_T - P_1) g_1 + I_1 + \eta}{g_1} R_1, \quad (3.17)$$

$$P_2 = \frac{\gamma}{W} \frac{\theta_2 (P_T - P_2) g_2 + I_2 + \eta}{g_2} R_2. \quad (3.18)$$

À partir des expressions (3.17) et (3.18), et en supposant que les interférences inter-cellules et le bruit de fond sont constants ¹ ($I_1 \approx I_2 = \text{constante}$, $\theta_1 \approx \theta_2 = \theta$, et en posant $\nu = I_i + \eta$) on trouve l'expression des puissances en fonction de P_T et des débits:

¹on peut se permettre de poser $I_1 \approx I_2 = \text{constante}$, si on suppose que les cellules adjacentes fonctionnent également par scheduling (un usager à la fois par time slot) à puissance maximale, et donc les cellules adjacentes auront comme puissance respectives P_{max}^k .

$$P_1 = \frac{\gamma(\theta P_T g_1 + \nu) R_1}{g_1(W + \gamma\theta R_1)} \quad (3.19)$$

$$P_2 = \frac{\gamma(\theta P_T g_2 + \nu) R_2}{g_2(W + \gamma\theta R_2)} \quad (3.20)$$

En additionnant membre à membre les deux équations (3.19) et (3.20) et en se rappelant de l'expression (3.10) on trouve:

$$P_1 + P_2 = \frac{\gamma(\theta P_T g_1 + \nu) R_1}{g_1(W + \gamma\theta R_1)} + \frac{\gamma(\theta P_T g_2 + \nu) R_2}{g_2(W + \gamma\theta R_2)} = P_T,$$

et donc:

$$[1 - \gamma\theta(\frac{R_1}{W + \gamma\theta R_1} + \frac{R_2}{W + \gamma\theta R_2})]P_T = \frac{\gamma\nu R_1}{g_1(W + \gamma\theta R_1)} + \frac{\gamma\nu R_2}{g_2(W + \gamma\theta R_2)}$$

$$[W^2 - \gamma^2\theta^2 R_1 R_2]P_T = \gamma\nu \frac{W g_2 R_1 + W g_1 R_2 \gamma\theta(g_1 + g_2) R_1 R_2}{g_1 g_2} \quad (3.21)$$

Le membre droit de l'équation (3.21) est positif en général, et nul seulement si $R_1 = R_2 = 0$. Donc il est nécessaire d'avoir:

$$W^2 - \gamma^2\theta^2 R_1 R_2 > 0. \quad (3.22)$$

L'inégalité (3.22) est toujours vérifiée physiquement, et donc on peut sans problème diviser par ce terme pour avoir:

$$P_T = \frac{\gamma\nu}{g_1 g_2} \frac{W g_2 R_1 + \gamma\theta(g_1 + g_2)R_1 R_2 + W g_1 R_2}{W^2 - \gamma^2 \theta^2 R_1 R_2}, \quad (3.23)$$

ou encore en posant:

$$\alpha_1 = \frac{\gamma\nu}{W g_1}, \quad (3.24)$$

$$\alpha_2 = \frac{\gamma\nu}{W g_2}, \quad (3.25)$$

$$\alpha_{12} = \frac{\gamma^2 \theta \nu (g_1 + g_2)}{g_1 g_2 W^2}, \quad (3.26)$$

$$\gamma_{12} = \frac{\gamma\theta}{W}, \quad (3.27)$$

on obtient l'expression plus compacte:

$$P_T = \frac{\alpha_1 R_1 + \alpha_2 R_2 + \alpha_{12} R_1 R_2}{1 - \gamma_{12}^2 R_1 R_2}. \quad (3.28)$$

La seule contrainte qu'il y ait sur la puissance est la suivante:

$$P_T \leq P_{max}. \quad (3.29)$$

Ce qui donnerait finalement:

$$\frac{\alpha_1 R_1 + \alpha_2 R_2 + \alpha_{12} R_1 R_2}{1 - \gamma_{12}^2 R_1 R_2} \leq P_{max}. \quad (3.30)$$

D'après la condition (3.22), il est possible de multiplier les deux côtés de l'inégalité

par $(1 - \gamma_{12}R_1R_2)$ sans changer de signe pour avoir:

$$\alpha_1 R_1 + \alpha_2 R_2 + (\alpha_{12} + P_{max} \gamma_{12}^2) R_1 R_2 \leq P_{max}. \quad (3.31)$$

Si on pose:

$$\beta = \alpha_{12} + \gamma_{12} P_{max}, \quad (3.32)$$

on obtient enfin la contrainte sur les débits:

$$\alpha_1 R_1 + \alpha_2 R_2 + \beta R_1 R_2 \leq P_{max} \quad (3.33)$$

ou encore en écriture matricielle:

$$r^T M r + N^T r \leq P_{max} \quad (3.34)$$

avec

$$M = \begin{bmatrix} 0 & \frac{\beta}{2} \\ \frac{\beta}{2} & 0 \end{bmatrix},$$

$$N^T = \begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{r}^{\mathbf{T}} = \begin{bmatrix} R_1 & R_2 \end{bmatrix}.$$

On peut ainsi voir comment à partir d'une contrainte sur la somme des puissances qui était une contrainte linéaire, on arrive à une contrainte sur les débits qui est quant à elle non linéaire. Dans ce qui suit, nous étudierons de plus près cette contrainte.

3.2.2 Nature des contraintes

D'après l'expression (3.34) on peut voir déjà si on pose l'égalité, qu'il s'agit bien d'une courbe conique, mais il reste cependant à en préciser le type.

Un résultat connu de la théorie des coniques, donne le type, en examinant simplement le signe du déterminant (ou encore le signe des valeurs propres) de la matrice M , et ainsi, pour rappel:

- Si $\det(M) < 0$, i.e., les deux valeurs propres de M sont non nulles, de signe contraire, et il s'agit d'une **Hyperbole**.
- Si $\text{Tr}(M) = 0$, i.e., si les deux valeurs propres de M sont opposées, il s'agit bien d'un cas particulier d'hyperbole appelée **Hyperbole équilatère**.
- Si $\det(M) > 0$, i.e., si les deux valeurs propres de M sont non nulles et de même signe, il s'agira alors d'une **Ellipse**.
- Si les deux valeurs propres de M sont égales, il s'agit bien d'un cas particulier de l'ellipse en l'occurrence un **Cercle**.
- Enfin si $\det(M) = 0$, i.e., l'une des valeurs propres de M est nulle, il s'agira d'une **Parabole**.

La matrice

$$M = \begin{bmatrix} 0 & \frac{\beta}{2} \\ \frac{\beta}{2} & 0 \end{bmatrix}$$

possède deux valeurs propres distinctes qui sont $\lambda_{1,2} = \pm \frac{\beta}{2}$, on peut donc constater qu'il s'agit bien d'une ***Hyperbole***, mais vu que $Tr(M) = 0$, il s'agit plus exactement d'une ***Hyperbole équilatère***.

La forme canonique d'une hyperbole est la suivante:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1; \quad (3.35)$$

Montrons que (3.34) correspond bien à une hyperbole.

Soit:

$$f(R_1, R_2) = \alpha_1 R_1 + \alpha_2 R_2 + \beta R_1 R_2 - P_T \quad (3.36)$$

Montrons qu'il existe un changement de base qui puisse transformer l'expression des contraintes vers la forme canonique de l'hyperbole.

Soit la transformation ponctuelle (rotation d'angle $\phi = \frac{\pi}{4}$) suivante:

$$\begin{aligned} R_1 &= \cos \phi \, u - \sin \phi \, v \\ R_2 &= \sin \phi \, u + \cos \phi \, v. \end{aligned} \quad (3.37)$$

Puisque:

$$\begin{aligned}
g(u, v) &= (\cos \phi u - \sin \phi v) \alpha_1 + \alpha_2 (\sin \phi u + \cos \phi v) + \\
&\quad + \beta (\cos \phi u - \sin \phi v) (\sin \phi u + \cos \phi v) - P_T. \\
&= u [\alpha_1 \cos \phi + \sin \phi \alpha_2] + v [-\alpha_1 \sin \phi + \alpha_2 \cos \phi] + \\
&\quad + \beta [u^2 \sin \phi \cos \phi - v^2 \sin \phi \cos \phi + uv (\cos^2 \phi - \sin^2 \phi)] - P_T = 0 \\
&= u (\alpha_1 + \alpha_2) \frac{\sqrt{2}}{2} + v (\alpha_2 - \alpha_1) \frac{\sqrt{2}}{2} + u^2 \frac{\beta}{2} - v^2 \frac{\beta}{2} - P_T = 0. \\
&= \frac{\beta}{2} \left[\left(u + \left(\frac{\alpha_1 + \alpha_2}{\beta} \right) \frac{\sqrt{2}}{2} \right)^2 - \left(v - \left(\frac{\alpha_2 - \alpha_1}{\beta} \right) \frac{\sqrt{2}}{2} \right)^2 \right] \\
&\quad - \frac{\beta}{2} \frac{(\alpha_1 + \alpha_2)^2}{\beta^2} \frac{1}{2} + \frac{\beta}{2} \frac{(\alpha_2 - \alpha_1)^2}{\beta^2} \frac{1}{2} - P_T = 0.
\end{aligned} \tag{3.38}$$

et donc:

$$\begin{aligned}
\left[u + \left(\frac{\alpha_1 + \alpha_2}{\beta} \right) \frac{\sqrt{2}}{2} \right]^2 - \left[v - \left(\frac{\alpha_2 - \alpha_1}{\beta} \right) \frac{\sqrt{2}}{2} \right]^2 &= \frac{2}{\beta} [P_T + \left(\frac{\beta}{4} \right) \frac{1}{\beta^2} (2\alpha_2)(2\alpha_1)] \\
&= \frac{2}{\beta} [P_T - \frac{1}{\beta} \alpha_1 \alpha_2].
\end{aligned} \tag{3.39}$$

D'où finalement:

$$\left[\frac{u + \left(\frac{\alpha_1 + \alpha_2}{\beta} \right) \frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\beta}} \sqrt{P_T + \frac{\alpha_1 \alpha_2}{\beta}}} \right]^2 - \left[\frac{v - \left(\frac{\alpha_2 - \alpha_1}{\beta} \right) \frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\beta}} \sqrt{P_T + \frac{\alpha_1 \alpha_2}{\beta}}} \right]^2 = 1. \tag{3.40}$$

En opérant maintenant une autre transformation ponctuelle (translation de vecteur $x = u + \left(\frac{\alpha_1 + \alpha_2}{\beta} \right) \frac{\sqrt{2}}{2}, y = v + \left(\frac{\alpha_2 - \alpha_1}{\beta} \right) \frac{\sqrt{2}}{2}$) et en posant $a = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\beta}} \sqrt{P_T + \frac{\alpha_1 \alpha_2}{\beta}}$, on retrouve bien la forme canonique (3.35).

En conclusion, nous avons réussi à montrer qu'il existe un changement de base dans lequel la contrainte (3.33) pouvait avoir la forme canonique d'une *Hyperbole*

équilatère. Ce changement de base en fait n'est rien d'autre qu'une transformation de *Similarité*.

Voyons à présent le graphique de la contrainte

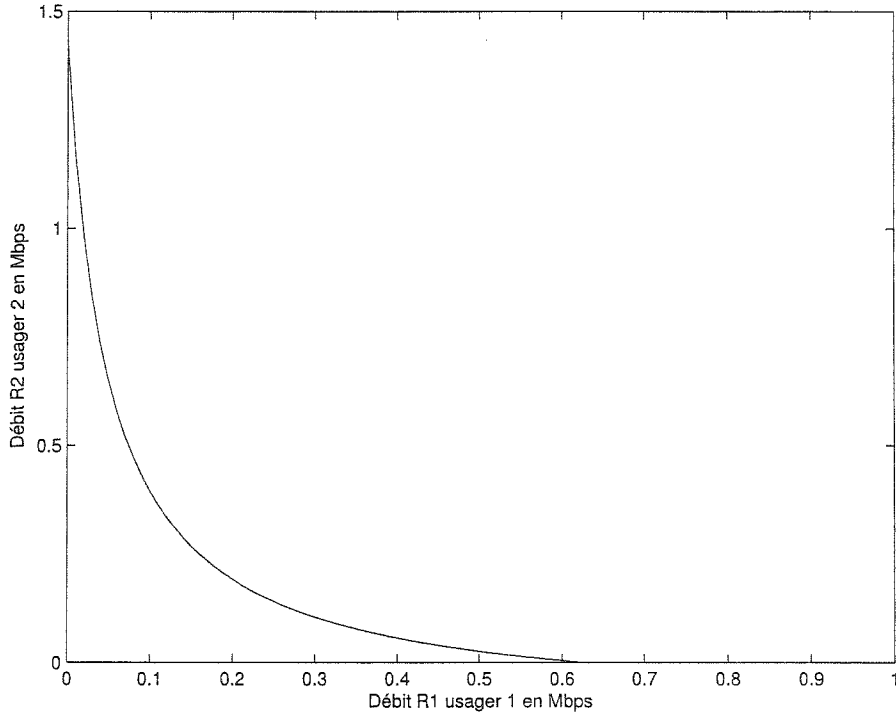


Figure 3.1 Contrainte hyperbolique sur les débits pour deux usagers

3.2.3 Modèle dynamique

Dans cette partie nous allons proposer un modèle dynamique de transmission de données, et nous commencerons ici aussi par le cas de deux usagers où nous verrons effectivement l'utilité d'avoir modélisé les contraintes en débit plutôt qu'en puissance. Modélisons la quantité de données résiduelles à transmettre à un temps t , pour un usager donné par une variable x_1 , positive (initialement, un nombre entier de bits à transmettre). La dynamique de $x_1(t)$ obéit à:

$$\frac{dx_1}{dt} = e_1(t) - R(t), \quad (3.41)$$

où $e_1(t)$ est le débit entrant, $R_1(t)$ est le débit sortant (vidage) et $x_1(t)$ est la quantité résiduelle à transmettre.

Afin d'obtenir des commandes à faible variabilité, il est plus intéressant d'enrichir la dynamique de la dérivée de la variable données résiduelles:²

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= e_1(t) - x_2(t), \\ \frac{dx_2}{dt} &= u_1(t), \end{aligned}$$

où $u_1(t)$ sera à présent considérée comme la commande indépendante. Plus généralement, il est désormais possible de donner le modèle dynamique pour multiples utilisateurs en posant comme variable d'états:

x_{2i-1} : la quantité de données à vider pour l'utilisateur i

x_{2i} : le débit de la station de base vers l'utilisateur i

u_i : la commande de l'utilisateur i

$e_i(t)$: le débit d'entrée de l'internet vers la station de base

$x_{2i-1}(t_0)$: condition initiale

Modèle à deux usagers:

$$\frac{dx_1}{dt} = e_1(t) - x_2(t) \quad (3.42)$$

²obtenir des commande avec peu de variabilité nous permettra de calculer plus facilement la commande pulsée à largeur modulée qu'on verra dans la section Scheduling de ce chapitre, et constitue en soi une caractéristique désirable.

$$\frac{dx_2}{dt} = u_1(t) \quad (3.43)$$

$$\frac{dx_3}{dt} = e_2(t) - x_4(t) \quad (3.44)$$

$$\frac{dx_4}{dt} = u_2(t) \quad (3.45)$$

soumis aux contraintes d'états liées à la puissance disponible (3.33):

$$x^T M x + N^T x \leq P_{max} \quad (3.46)$$

et de non négativité des variables:

$$x_i \geq 0, \quad i = 1, \dots, 4. \quad (3.47)$$

On peut à présent, par soucis de simplicité reprendre le système dynamique, avec des stocks à transmettre initialement fixés, ne variant pas sur l'horizon de commande ($e_1(t) \equiv e_2(t) \equiv 0$). Dans un contexte où il y aurait des arrivées de données par vagues, nous choisirons de propager la solution développée dans l'analyse qui suit, jusqu'à l'arrivée de donnée la plus rapprochée dans le futur. Suite à cette arrivée, la commande optimale serait recalculée avec de nouvelles conditions initiales. Le résultat global serait incontestablement une commande sous-optimale par rapport à celle qui résulterait d'une modélisation stochastique des arrivées de données. Elle est cependant plus simple à implanter. Sur un horizon de commande sur lequel il n'y a aucune arrivée de données nouvelles à transmettre, la dynamique sera donc écrite par:

$$\frac{dx_1}{dt} = -x_2 \quad (3.48)$$

$$\frac{dx_2}{dt} = u_1 \quad (3.49)$$

$$\frac{dx_3}{dt} = -x_4 \quad (3.50)$$

$$\frac{dx_4}{dt} = u_2. \quad (3.51)$$

3.3 Formulation d'un problème de commande optimale sous contraintes

Dans cette section nous allons enfin poser nos objectifs de lien descendant en terme de commande optimale. Le critère d'optimalité qui sera retenu est avant tout quadratique pour les raisons suivantes:

- Bonne connaissance de la solution;
- Simplicité de la solution;
- Permet de minimiser la variabilité de la commande.
- Permet de simuler des critères opportunistes, ou des critères d'équité, ou encore des critères favorisant les gros usagers par rapport aux petits, ou inversement, le tout à l'intérieur d'une même théorie et en ajustant convenablement les pondérations dans le critère coût.

Ainsi, si on pose le critère quadratique suivant:

$$\begin{aligned}
J(x_0, T) = & \int_0^T q_1(g_1x_1/x_1(0))^2 + q_2(g_1x_2)^2 + q_1(g_2x_3/x_3(0))^2 + q_2(g_2x_4)^2 \\
& + r_1u_1^2 + r_2u_2^2 dt + m_1x_1^2(T) + m_2x_2^2(T) + m_3x_3^2(T) + m_4x_4^2(T),
\end{aligned}
\tag{3.52}$$

avec:

x_1 : stock de données résiduel à transmettre à l'utilisateur 1,

x_2 : débit de transmission de données de l'utilisateur 2,

$x_1(0)$: stock de données initial à transmettre,

g_1 : facteur d'atténuation de l'utilisateur 1 dans son canal.

Pour l'utilisateur 2, les définitions qu'on vient de poser demeurent les mêmes, pour les indices respectifs.

Dans ce critère, on vient bien la distinction entre l'utilisateur 1 et l'utilisateur 2. Ainsi, si l'utilisateur 1 possède un meilleur canal que l'utilisateur 2, il serait logique que l'utilisateur 1 puisse recevoir les données plus facilement que l'utilisateur 2; donc en pondérant les stocks par les g_i , nous sommes en train de pénaliser l'utilisateur qui possède le canal le plus mauvais. De même, on peut choisir de suivre deux stratégies de gestion distinctes: chercher à évacuer les usagers avec les stocks les plus petits d'abord (auquel cas, on peut choisir des poids inversement proportionnels à une puissance supérieure ou égale à 1, du stock initial), ou alors rendre le poids indépendant de la condition initiale, auquel cas de facto, on favorise l'évacuation plus rapide des gros usagers (dans une optique de profit assuré). En (3.52), la fonction coût présentée, aurait tendance à engendrer un temps de partage égal de la puissance de base par tous les mobiles. Enfin, en intégrant le carré de la commande dans le critère, nous visons la minimisation de la variabilité de la commande, qui est, la dérivée du débit. Il faudra noter également la présence du terme final, qui vise à réaliser les objectifs à l'instant final (tous les stocks transmis), si ce n'est pas encore fait.

Cependant, dans le cadre de la commande optimale linéaire quadratique (LQR), il existe plusieurs variantes. Laquelle retiendrons nous ?

Une première formulation est proposée à la sous-section suivante.

3.3.1 Synthèse naïve de la commande optimale (sans tenir compte des contraintes)

On peut procéder naïvement à la synthèse de la commande optimale LQR sans tenir compte de la contrainte. En d'autres termes, après synthèse sans contraintes, une vérification est faite a posteriori quant à la satisfaction des contraintes. La méthode semble naïve mais elle nous permet quand même de développer certaines idées quant aux améliorations possibles.

Choisissons le critère LQ sur horizon infini.

Il s'agit de résoudre le problème:

$$\min_u J = \int_0^\infty x^T Q x + u^T R u \quad dt \quad (3.53)$$

Sous les contraintes dynamiques:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -x_2 \\ \dot{x}_2 &= u_1 \\ \dot{x}_3 &= -x_4 \\ \dot{x}_4 &= u_2. \end{aligned} \quad (3.54)$$

Il est clair ici, que nous avons un système complètement commandable et complètement observable, et donc d'après les résultats du chapitre 2, l'existence et l'unicité

de la solution à ce problème sont garanties. Reprenant la solution du chapitre 2, nous donne:

$$u^*(t) = -R^{-1}B^T Px(t) \quad (3.55)$$

avec $P = P^T > 0$ matrice constante solution de l'équation algébrique de Riccati (II.8), qu'on rappelle ici

$$PA + A^T P + Q - PBR^{-1}B^T P = 0. \quad (3.56)$$

Nous avons effectué des résultats de simulation pour ce problème avec comme condition initiale $x_0^T = [10 \ 0.2 \ 5 \ 0.1]$, toutes ces grandeurs sont de l'ordre du Mégabit pour les stocks et de Mégabits par secondes pour les débits (il en sera de même pour le reste de nos exemples numériques). On précisera aussi qu'on a pris la condition initiale sur les débits ($x_{20} = 0.2, x_{40} = 0.1$ à l'intérieur des contraintes voir la figure 3.1.

Les cas développés sont les suivants:

Dans le cas où $Q = I_{4 \times 4}, R = I_{2 \times 2}$, les trajectoires obtenues sont représentées sur la figure 3.2, alors que la courbe $(x_2(t), x_4(t))$ est représentée sur la figure 3.3, pour vérifier la satisfaction de la contrainte (3.46).

On pourra observer les stocks des usagers x_1, x_3 qui décroissent exponentiellement, tandis que les débits x_2, x_4 sont croissants au début du parcours, avant de chuter à zéro lorsque les stocks sont arrivés à zéro (voir figure 3.2).

En ce qui concerne la figure 3.3, on voit clairement que les contraintes de puissance

maximale sont violées.

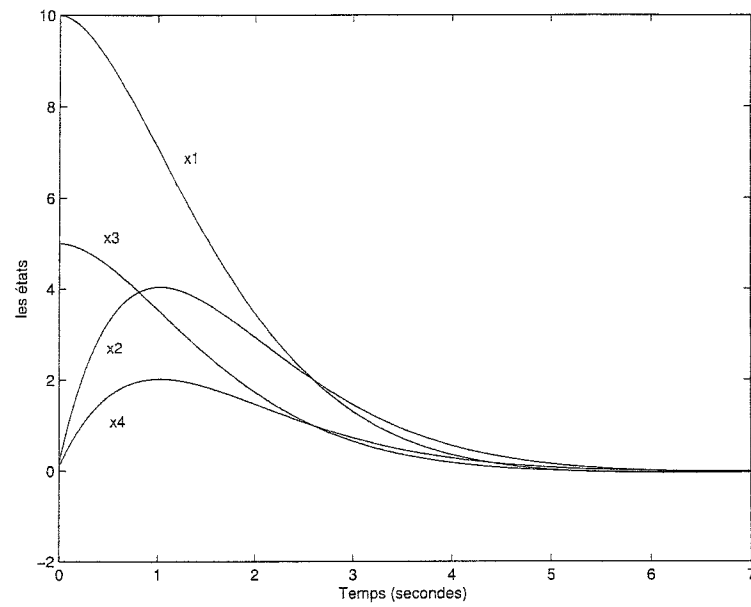


Figure 3.2 Réponse Temporelle des états pour $Q = I_{4 \times 4}, R = I_{2 \times 2}$

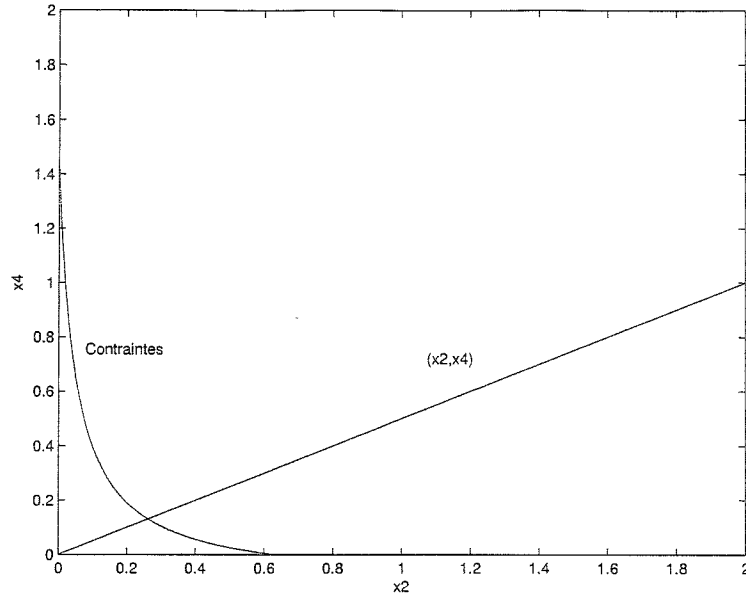


Figure 3.3 Trajectoire de phase (x_2, x_4) pour $Q = I_{4 \times 4}, R = I_{2 \times 2}$

L'expérience a montré pour d'autres coefficients de pondérations, qu'il est difficile de rester sous la courbe de contraintes, en particulier, si on fait varier les conditions initiales. En conclusion, il apparaît donc que la synthèse naïve de la commande, sans tenir compte des contraintes, est à rejeter totalement.

3.4 Reconsidération du problème de commande optimale avec contraintes et sa résolution

Nous savons à présent, qu'il est essentiel de tenir compte des contraintes dans la synthèse de la commande optimale. Toutefois, les méthodes qui ont été exposées au Chapitre 2 (Section 2.4), ne nous arrangent pas, dans le sens où elle donnent des commandes discontinues et surtout en boucle ouverte (nous connaissons bien les désavantages de ce genre de contrôle). Il faut alors développer une approche

originale.

Reprenons la courbe hyperbolique de contraintes, Figure 3.1, et considérons la droite joignant ses deux points limites (voir figure 3.4).

L'équation de cette droite est la suivante:

$$R_2 = -aR_1 + b, \quad (3.57)$$

avec

$$a = \frac{R_{2max}}{R_{1max}} > 0, \quad (3.58)$$

$$b = R_{2max} = \frac{P_{max}}{10^6 \alpha_2} > 0, \quad (3.59)$$

où $\alpha_1, \alpha_2, P_{max}$ sont des constantes du système à deux usagers dans leur position courante. La figure (3.4) est tracée en se basant sur les paramètres d'un réseau réel.

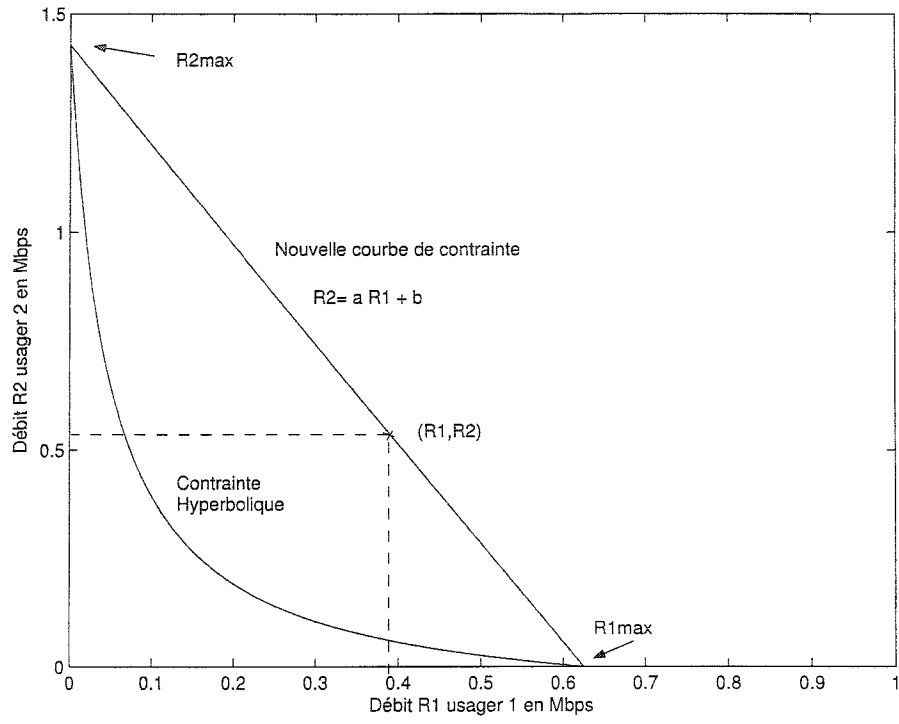


Figure 3.4 Courbe de contrainte modifiée

Si nous sommes sur le point (R_1, R_2) tel que montré à la figure 3.4, on peut dire que chaque composante du débit porte une portion du débit maximal pour chaque usager:

$$\begin{aligned} R_1 &= \gamma_1 R_{1max} \\ R_2 &= \gamma_2 R_{2max} \end{aligned} \tag{3.60}$$

Calculons la tangente en ce point quelconque:

$$\begin{aligned}
\tan \phi &= -\frac{R_2}{R_{1max}-R_1} \\
&= -\frac{\gamma_2 R_{2max}}{R_{1max}-\gamma_1 R_{1max}} \\
&= -a \frac{\gamma_2}{1-\gamma_1}.
\end{aligned} \tag{3.61}$$

Vu que ce point appartient à la droite, $\tan \phi = -a$. Alors nous obtenons

$$\gamma_2 = 1 - \gamma_1 \tag{3.62}$$

Ce résultat en fait, n'est pas étonnant. Il exprime le fait que tout point d'un segment est une combinaison convexe de ses extrémités. Cependant, le point (R_1, R_2) est hors contraintes; nous montrons dans la proposition qui suit, qu'on peut "simuler" son utilisation en opérant tour à tour aux extrémités $(R_{1max}, 0)$, $(0, R_{2max})$, pour des fractions du temps total respectives, de γ_1 et γ_2 .

Proposition 1 *Soit un intervalle de temps constant $[t_1, t_2]$ sur lequel on chercherait à appliquer un débit $\begin{pmatrix} x_2 \\ x_4 \end{pmatrix} = \gamma_1 \begin{pmatrix} R_{1max} \\ 0 \end{pmatrix} + \gamma_2 \begin{pmatrix} 0 \\ R_{2max} \end{pmatrix}$ pour le système (3.54), avec $\gamma_1, \gamma_2 \in [0, 1]$. Il est possible de réaliser les mêmes niveaux de données transmises $\begin{pmatrix} x_1(t_2) - x_1(t_1) \\ x_3(t_2) - x_3(t_1) \end{pmatrix}$ en transmettant uniquement aux débits discrets $0, \begin{pmatrix} R_{1max} \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 \\ R_{2max} \end{pmatrix}$.*

Preuve.

Si on attribue aux proportions

$$\begin{aligned}
x_1(t_2) - x_1(t_1) &= - \int_{t_1}^{t_2} R_1 dt = -R_1(t_2 - t_1) \\
x_2(t_2) - x_1(t_1) &= - \int_{t_1}^{t_2} R_2 dt = -R_2(t_2 - t_1).
\end{aligned} \tag{3.63}$$

Il s'ensuit que:

$$\begin{aligned}
X_1(t_1) - X_1(t_2) &= - \begin{pmatrix} R_1 \\ R_2 \end{pmatrix} (t_2 - t_1) \\
&= \left[\gamma_1 \begin{pmatrix} R_{1max} \\ 0 \end{pmatrix} + \gamma_2 \begin{pmatrix} 0 \\ R_{2max} \end{pmatrix} \right] (t_2 - t_1) \\
&= \left[\gamma_1(t_2 - t_1) \begin{pmatrix} R_{1max} \\ 0 \end{pmatrix} + \gamma_2(t_2 - t_1) \begin{pmatrix} 0 \\ R_{2max} \end{pmatrix} \right].
\end{aligned} \tag{3.64}$$

avec $X_1 = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_3 \end{bmatrix}$.

De l'équation (3.64), il apparaît que si on applique le débit vectoriel $\begin{pmatrix} R_{1max} \\ 0 \end{pmatrix}$ pendant la première partie du temps $\gamma_1(t_2 - t_1)$ de l'intervalle $[t_1, t_2]$, et le débit vectoriel $\begin{pmatrix} 0 \\ R_{2max} \end{pmatrix}$ pendant la deuxième partie, à la fin de l'intervalle $[t_1, t_2]$, les quantités transmises pour chacun des stocks sont inchangées. En fait, ces quantités seront inchangées pour tout fractionnement de l'intervalle tel que les proportions du temps total passé à $\begin{pmatrix} R_{1max} \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 \\ R_{2max} \end{pmatrix}$ soient respectivement γ_1 et γ_2 .

C.Q.F.D

Nous avons les corollaires suivants:

Corollaire 1 *Il est possible de simuler la courbe de contrainte de puissance linéaire telle que modifiée sur la figure 3.4, en opérant uniquement aux points extrêmes $\begin{pmatrix} R_{1max} \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 \\ R_{2max} \end{pmatrix}$. De plus, en vertu du fait qu'une telle stratégie de transmission correspondrait de facto à du Scheduling, elle minimise le temps total requis pour transmettre les données.*

Preuve. La preuve est immédiate à partir de la proposition précédente.

C.Q.F.D

Corollaire 2 *Il est plus optimal de travailler sur la droite de contrainte en combinaison convexe temporelle des points extrêmes, que de travailler à l'intérieur de la contrainte hyperbolique sans pour autant violer cette dernière.*

Preuve. On sait qu'il est plus optimal de travailler en Scheduling comme on l'a montré au début du chapitre. On vient de prouver par ailleurs que les quantités de données transmises sont maximales pour moins d'interférences. Enfin il est facile de voir qu'il existe une bijection entre l'ensemble des points de la droite de contrainte et les proportions de temps $\gamma_i(t)$, et donc il est toujours possible de se trouver aux extrémités de la droite pendant des intervalles de temps très courts et bien définis qui donnent fictivement une position sur la droite de contrainte. Par le biais de ce stratagème, nous ne sommes pas en violation de la contrainte.

C.Q.F.D

En conclusion, il sera donc préférable de remplacer le domaine hyperbolique de puissance par la contrainte linéaire modifiée (figure 3.4), à condition d'interpréter la commande qui en résulte comme devant être suivie uniquement en moyenne temporelle de temps successifs de taille arbitrairement petite.

Le système dynamique devient donc:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -x_2 \\ \dot{x}_2 &= u_1 \\ \dot{x}_3 &= ax_2 + x_4 \\ \dot{x}_4 &= 0 \quad x_{40} = -b, \end{aligned} \tag{3.65}$$

avec les contraintes de non négativité $x_i \geq 0, i = 1, \dots, 4$.

On remarquera que l'expression du débit x_3 est telle que l'on se trouve systématiquement sur la courbe de contrainte de puissance linéarisée. De plus, bien que la dynamique reste linéaire, le nouveau système n'est plus complètement commandable. Il faut alors reconsidérer de façon appropriée l'utilisation de la commande LQR.

Nous avons la proposition suivante.

Proposition 2 *Le temps minimal pour la transmission des usagers est égal à $T = \frac{ax_{10}+x_{30}}{b}$ et ceci, quel que soit le contrôle, avec x_{10}, x_{30} les stocks de données initiaux à transmettre, a, b paramètres de la droite des débits de contraintes (3.4).*

Preuve. Reprenons l'équation dynamique du système la même que celle de (3.65)

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= -x_2 \\
\dot{x}_2 &= u_1 \\
\dot{x}_3 &= ax_2 + x_4 \\
\dot{x}_4 &= 0 \quad x_{40} = -b;
\end{aligned} \tag{3.66}$$

Intégrons la première, la troisième équation et en injectant $x_4 = -b$

$$\begin{aligned}
x_1(t) - x_{10} &= -\int_0^t x_2(\tau) d\tau \\
x_3(t) - x_{30} &= a \int_0^t x_2(\tau) d\tau - bt.
\end{aligned} \tag{3.67}$$

Calculons le temps T pour lequel les stocks résiduels de données à transmettre, atteignent zéro pour la première fois.

$$\begin{aligned}
x_1(T) &= 0 \\
x_3(T) &= 0
\end{aligned} \tag{3.68}$$

(3.67) et (3.68) donnent:

$$x_{10} = \int_0^T x_2(\tau) d\tau \tag{3.69}$$

$$x_{30} = -a \int_0^T x_2(\tau) d\tau + bT \tag{3.70}$$

En remplaçant (3.69) dans (3.70), on trouve:

$$T = \frac{x_{30} + ax_{10}}{b}. \tag{3.71}$$

C.Q.F.D

Remarque 1 *Notons que le résultat en (3.71) représente le temps minimum requis pour transmettre toutes les données, et la valeur obtenue est indépendante du contrôle précis appliqué, excepté qu'en vertu de la troisième équation de (3.66); on opère toujours à un débit conjoint maximal.*

Remarque 2 *Si on reprend les deux équations qu'on vient d'intégrer, puis qu'on laisse l'instant final suspendu à t , nous avons alors la relation:*

$$x_{30} - x_3(t) = -a(x_{10} - x_1(t)) + bt. \quad (3.72)$$

Si nous avons des usagers identiques, $a = 1$, nous aurons alors

$$(x_{30} - x_3(t)) + (x_{10} - x_1(t)) = bt \quad (3.73)$$

qui représente les stocks transmis par les deux usagers en même temps, égal au stock transmis par un seul usager, lorsque son stock est vidé à débit maximal.

À présent, face au nouveau système dynamique, il est encore important de lui adjoindre un critère adéquat d'optimisation. Il est clair que le critère à horizon infini ne sera pas retenu, nous avons maintenant l'information pertinente sur le temps final tel qu'établie la Proposition 2. Également, une commande sur horizon infini serait contre productive puisqu'à cause de l'hypothèse que la puissance maximale doit toujours être utilisée, elle forcerait des valeurs négatives des états. Il est donc *critique* de travailler sur horizon fini.

3.4.1 Commande optimale à horizon fini sans pondération sur les états ($Q = 0$) et à action terminale

En posant $Q = 0$ nous allons avoir une simplification dans la solution analytique. Le problème devient donc

$$\min_u J = \int_0^T u^T R u \, dt + x^T(T) M x(T) \quad (3.74)$$

Sous contrainte dynamique

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -x_2 \\ \dot{x}_2 &= u_1 \\ \dot{x}_3 &= ax_2 + x_4 \\ \dot{x}_4 &= 0 \quad x_{40} = -b \end{aligned} \quad (3.75)$$

avec

$$x_i \geq 0, i = 1, \dots, 4 \quad (3.76)$$

et

$$T = \frac{x_{30} + ax_{10}}{b} \quad (3.77)$$

D'après le chapitre 2, la solution à ce problème se fait en résolvant l'équation différentielle de Riccati, qui se réduit dans ce cas à une équation de Lyapunov. En effet, la solution est:

$$u(t) = -K(t)x(t), \quad (3.78)$$

avec

$$K(t) = -R^{-1}B^T P(t)x(t), \quad (3.79)$$

où $P(t)$ est solution de l'équation de Riccati:

$$\begin{aligned} -\dot{P} &= A^T P + P A - P B R^{-1} B^T P \\ P(T) &= \infty I. \end{aligned} \quad (3.80)$$

Notons que la condition finale $P(T) = \infty I$ est choisie ici, afin de forcer l'état final à aller vers zéro (voir Chapitre 2); cependant, comme cette condition est difficile à implanter numériquement, il est alors préférable d'opérer le changement de variable suivant:

$$\begin{aligned} S(t) &= P^{-1}(t) \\ S(T) &= 0.I. \end{aligned} \quad (3.81)$$

On pourra remarquer aussi que le terme en Q ne figure plus dans l'équation de Riccati, ce qui nous permettra finalement d'aboutir à une équation linéaire qui est l'équation de Lyapunov suivante:

$$\begin{aligned} \dot{S} &= S A^T + A S - B R^{-1} B^T \\ S(T) &= 0.I. \end{aligned} \quad (3.82)$$

La solution de l'équation (3.82) est la suivante (voir section 3.3.2 du Chapitre 2, méthode 1)

$$S(t) = e^{At}S(0)e^{A^T t} - \int_0^t e^{A(t-\tau)}BR^{-1}B^Te^{A^T(t-\tau)}d\tau. \quad (3.83)$$

Mais comme, nous n'avons pas de connaissance sur la solution à l'instant initiale mais plutôt à l'instant final, on procèdera alors à un autre changement de variable.

$$t = T - \tau \quad (3.84)$$

et donc

$$dt = -d\tau$$

l'équation (3.82) devient:

$$-\frac{dS(T-\tau)}{d\tau} = S(T-\tau)A^T + AS(T-\tau) - BR^{-1}B^T \quad (3.85)$$

aussi, on posera

$$S(T-\tau) = \Psi(\tau) \quad (3.86)$$

pour avoir finalement:

$$\begin{aligned}
\dot{\Psi} &= -\Psi A^T - A\Psi + BR^{-1}B^T \\
\Psi(0) &= S(T) = 0\,I.
\end{aligned}
\tag{3.87}$$

La solution à l'équation (3.87) est donc:

$$\Psi(\tau) = e^{-A\tau}\Psi(0)e^{-A^T\tau} + \int_0^\tau e^{-A(\tau-w)}BR^{-1}B^Te^{-A^T(\tau-w)}dw. \tag{3.88}$$

Étant donnée la matrice A, de notre système:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

on peut remarquer qu'il s'agit bien d'une matrice nilpotente d'indice 2. En effet, un simple calcul montre que:

$$A^2 = 0, \tag{3.89}$$

ce qui nous permet d'écrire:

$$e^{-A\tau} = I - A\tau. \tag{3.90}$$

Pour la suite on posera:

$$F = BR^{-1}B^T \quad (3.91)$$

Ainsi, l'équation (3.88), (3.91), (3.90) donnent:

$$\begin{aligned} \Psi(\tau) &= (I - A\tau)\Psi(0)(I - A^T\tau) + \int_0^\tau [I - A(\tau - w)]F[I - A^T(\tau - w)]dw \\ &= \Psi(0) - \Psi(0)A^T\tau - A\Psi(0)\tau + A\Psi(0)A^T\tau^2 \\ &\quad + \int_0^\tau [F - FA^T(\tau - w) - AF(\tau - w) + AFA^T(\tau - w)^2] dw \\ &= \Psi(0) - \Psi(0)A^T\tau - A\Psi(0)\tau + A\Psi(0)A^T\tau^2 \\ &\quad + F\tau - FA^T\frac{\tau^2}{2} - AF\frac{\tau^2}{2} + AFA^T\frac{\tau^3}{3}. \end{aligned} \quad (3.92)$$

d'où finalement en revenant à l'ancienne variable matricielle (3.86) et (3.84)

$$S(t) = \Psi(T - t), \quad (3.93)$$

on obtient:

$$\begin{aligned} S(t) &= S(T) - S(T)A^T(T - t) - AS(T)(T - t) + AS(T)A^T(T - t)^2 + F(T - t) \\ &\quad - \frac{1}{2}FA^T(T - t)^2 - \frac{1}{2}AF(T - t)^2 + \frac{1}{3}AFA^T(T - t)^3. \end{aligned} \quad (3.94)$$

En se rappelant de la condition finale $S(T) = 0$, on trouve alors:

$$S(t) = F(T - t) - \frac{1}{2}FA^T(T - t)^2 - \frac{1}{2}AF(T - t)^2 + \frac{1}{3}AFA^T(T - t)^3. \quad (3.95)$$

Remarque 3 *Il est également possible de trouver la solution à ce problème en suivant la méthode 2 dans la section 2.3.3.2. Cette solution est disponible en annexe III où nous avons développé une proposition simplificatrice.*

Si on remplace maintenant les matrices:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad R = r, \quad F = BR^{-1}B^T = r^{-1} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

On trouve finalement la solution:

$$S(t) = r^{-1} \begin{bmatrix} \frac{1}{3}(T-t)^3 & \frac{1}{2}(T-t)^2 & -\frac{a}{3}(T-t)^3 & 0 \\ \frac{1}{2}(T-t)^2 & (T-t) & -\frac{a}{2}(T-t)^2 & 0 \\ -\frac{a}{3}(T-t)^3 & -\frac{a}{2}(T-t)^2 & \frac{a^2}{3}(T-t)^3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.96)$$

On peut faire deux observations à ce stade: la première, c'est que la matrice $S(t)$ est symétrique; ce résultat était prévisible car cela découle des propriétés de la solution. La deuxième observation, c'est que la matrice $S(t)$ possède une ligne (une colonne) nulle, ce qui veut dire que la matrice $S(t)$ est singulière, ce qui rendrait impossible l'équation (3.81), qui ne l'oublions pas, est la matrice qui nous donne le retour d'état (3.78). Ce résultat était aussi prévisible, car il fallait inverser une matrice nulle à l'instant final.

Il est donc indispensable de perturber légèrement la solution en introduisant à la condition finale

$$S(T) = \epsilon I, \quad \epsilon \approx 10^{-m}, \quad (3.97)$$

avec $m \geq 5$.

Et ainsi, la solution doit être prise de l'équation (3.94), et par la suite vérifier (3.81), (3.79) et (3.78) pour obtenir le retour d'état final.

Des simulations ont été menées pour valider notre synthèse, en prenant les valeurs suivantes:

$$a = 2.2857, \quad b = 1.4286, \quad r = 10, \quad x_0^T = \begin{bmatrix} 10 & 0.1 & 20 & -b \end{bmatrix}, \quad \epsilon = 10^{-5}. \quad (3.98)$$

Ce qui donnerait déjà le temps final (voir proposition 3.71) $T = \frac{a x_1(0) + x_3(0)}{b} = 30$.

Les paramètres a et b ont été calculés à partir de données d'un réseau réel correspondant à la courbe de contraintes figure 3.4.

Comme on peut le voir sur la figure 3.5, les deux usagers transmettent leurs packets de données simultanément à partir de deux conditions initiales différentes pour arriver à un stock nul à la fin du temps T ainsi calculé à priori.

On pourra noter aussi sur la figure 3.6 la relation linéaire entre le débit des deux usagers; on remarquera de même que le débit suit une trajectoire au début croissante pour atteindre un maximum, puis décroître. L'inverse se produit pour l'autre usager. On peut voir que le maximum de l'un arrive en même temps que le minimum de l'autre, ce qui montre bien les échanges de puissance. Enfin il faut noter le signe négatif des débits, qui justifie bien la transmission de la station de base

vers les usagers.

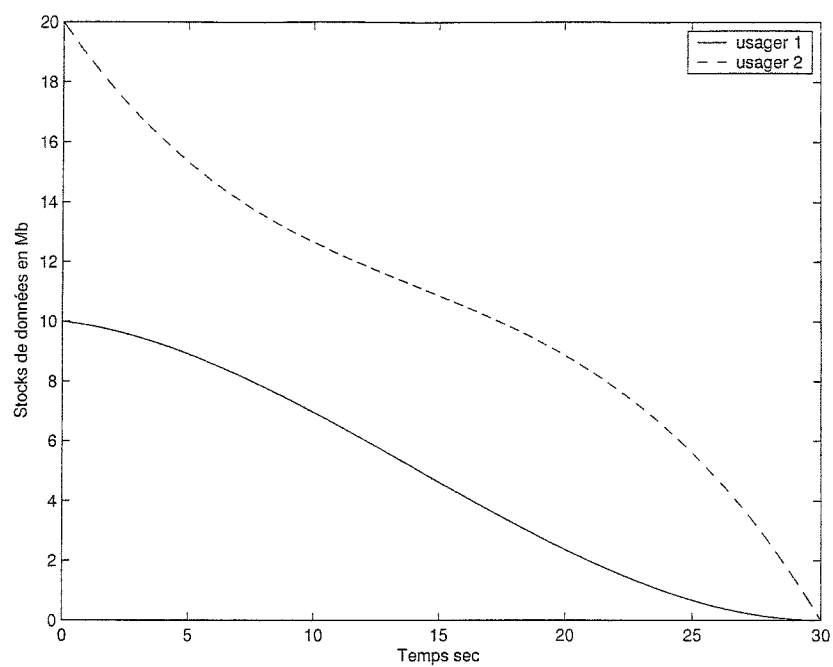


Figure 3.5 Stocks de données pour le cas de deux usagers

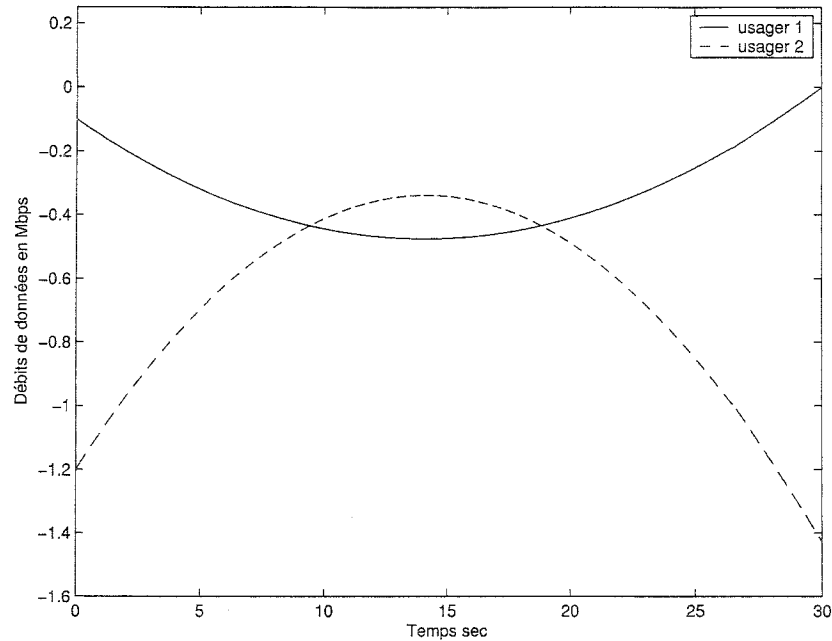


Figure 3.6 débits de données pour le cas de deux usagers

D'après ce qu'on vient de voir, la commande optimale donne une solution intéressante pour le problème posé, mais par contre nous avons constaté des insuffisances dans cette approche, dans le sens où nous n'avons aucun contrôle direct sur l'évolution des états. Les états représentent les usagers, et avec ce modèle $Q = 0$, les usagers sont invisibles dans le critère d'optimisation, et la chose qui caractérise un usager par rapport à un autre, c'est principalement la quantité d'information à transmettre puis sa localisation (l'état de son canal) dans le réseau à savoir son gain g_i (voir chapitre 1). De plus, la valeur maximale du débit qu'on observe sur la figure 3.6 peut être une valeur qui a violé les contraintes du système et un moyen de la réduire, c'est justement d'imposer une pondération $Q \neq 0$ sur les états afin de remplir les objectifs attendus, en toute sécurité.

Cette analyse nous mène à présent à penser au cas de la commande optimale à action terminale avec pondérations Q, R .

3.4.2 Commande optimale à horizon fini à action terminale avec pondération sur les états $Q \neq 0$

Dans ce paragraphe, nous allons reprendre le même modèle que le cas précédent, en opérant un léger changement dans le critère, qui aura pour conséquence de rendre la performance dépendante de la trajectoire d'état non seulement à l'instant final, mais tout au long de l'horizon de commande.

Tel que mentionné à la section précédente, ce qui distingue un usager par à un autre, c'est bien entendu la quantité de données à transmettre mais également la qualité du canal de communication associé. Plus précisément, est-il dans une situation plus favorable qu'un autre pour effectuer la transmission ?

La qualité du canal, est mesurée ici par le paramètre g_i , qui est le facteur d'atténuation (Chapitre 1).

Un critère qui viendrait donc palier les insuffisances de l'analyse précédente est le suivant:

$$J(x_0, T) = \int_0^T \sum_{i=1}^N [q_{2i-1}(g_i x_{2i-1})^2 + q_{2i}(g_i x_{2i})^2 + r_i u_i^2] dt + x^T(T) M x(T), \quad (3.99)$$

Où:

x_{2i-1} : représente les paquets de données à transmettre à l'utilisateur i ,

x_{2i} : représente le débit de transmission de l'utilisateur i ,

q_{2i-1} , q_{2i} , r_i : représentent respectivement les pondérations sur les paquets de données, les débits de transmission et la commande pour chaque usager i ,

g_i : est le facteur d'atténuation pour l'utilisateur i .

N : le nombre d'utilisateurs dans la stations de base, et ici, il s'agit de 2.

On voit bien dans le critère (3.99), la distinction entre l'utilisateur i qui possède un facteur d'atténuation g_i et l'utilisateur j qui possède un facteur d'atténuation g_j , dans le sens où si i est dans une meilleure situation que j , alors on devrait avoir:

$$0 \leq g_j < g_i \leq 1 \quad (3.100)$$

et dans ce cas il est alors logique que l'utilisateur i ait plus de facilité à transmettre que l'utilisateur j ; ce qui voudrait dire que l'utilisateur i , doit être plus pondéré (plus important) que l'utilisateur j , et c'est exactement ce que décrit le critère (3.99).

Les pondérations q_{2i-1} et q_{2i} peuvent-être les mêmes pour chaque usager i.e., ($q_{2i-1} = \text{constante}$) et ($q_{2i} = \text{constante}$), car la différence entre les usagers est déjà significative par le biais des g_i . En l'occurrence, l'utilisation des pondérations q est seulement en vue de modéliser convenablement les états d'une façon globale et unifiée afin de pouvoir les utiliser dans un algorithme temps réel où le choix des pondérations doit être fait a priori et de façon définitive.

Enfin, il aurait été possible d'opérer la pénalisation sur les usagers d'une façon plus ou moins sévère en mettant au lieu de g_i^2 , une pondération g_i , qui est moins sévère à l'égard des usagers associés à un mauvais canal de communication, ou encore, g_i^3 qui est plus sévère (sachant que $g_i < 1$).

Enfin, l'indice de performance tel que proposé aurait tendance à accorder une attention plus immédiate aux usagers ayant des stocks importants à transmettre. Ce choix pourrait se justifier par le fait que la perte d'un tel usager par découragement

entraînerait un manque à gagner plus important pour l'exploitant. Un tel biais en faveur des usagers associés aux stocks les plus importants pourrait être atténué en divisant les stocks par leur condition initiale chacun. Toutes ces modifications sont réalisables en restant dans le cadre mathématique développé ici:

$$\min_u J(x_0) = \int_0^T [x^T Q x + u^T R u] dt + x^T(T) M x(T) \quad (3.101)$$

Sous la même contrainte dynamique:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -x_2 \\ \dot{x}_2 &= u_1 \\ \dot{x}_3 &= ax_2 + x_4 \\ \dot{x}_4 &= 0, \quad x_{40} = -b \end{aligned} \quad (3.102)$$

avec

$$x_i \geq 0, \quad (3.103)$$

et

$$T = \frac{x_{30} + ax_{10}}{b}. \quad (3.104)$$

La solution à ce problème a été donnée au Chapitre 2. On reportera donc la solution ici:

$$\begin{aligned} u^*(t) &= -K(t)x(t); \\ K(t) &= R^{-1}B^T P(t) \end{aligned} \tag{3.105}$$

avec $P(t)$ vérifiant l'équation différentielle de Riccati:

$$\begin{aligned} \dot{P} &= A^T P + P A - P B R^{-1} B^T P + Q \\ P(T) &= M. \end{aligned} \tag{3.106}$$

Des simulations ont été menées afin de voir le comportement des usagers. On retiendra par ailleurs les pondérations mise en jeu qui sont:

$$q_1 = q_2 = q_3 = 10^{-4}, \quad R = 1; \tag{3.107}$$

Comme on peut le voir sur la figure 3.7, les paquets de données des deux usagers se transmettent durant le temps optimal ainsi calculé, de deux conditions initiales différentes.

Si on observe le débit de chaque usager sur la figure 3.8, on pourra constater que les dérivées des stocks sont négatifs (débits positifs), ce qui montre bien que la station de base transmet vers les usagers, sans gain de données. On pourra constater aussi que les débits sont des fonctions non monotones, ce qui permet des échanges entre les usagers dans le sens où le maximum de débit chez l'un représente le minimum de débit chez l'autre. Enfin on pourra noter que le premier usager voit son débit nul au temps final ce qui n'est pas le cas de l'autre usager, et ceci peut être expliqué par la notion de commandabilité. En effet le sous-système que représente le premier usager est commandable, tandis que le sous-système qui représente le second ne l'est pas: son comportement est strictement une fonction de celui du premier usager.

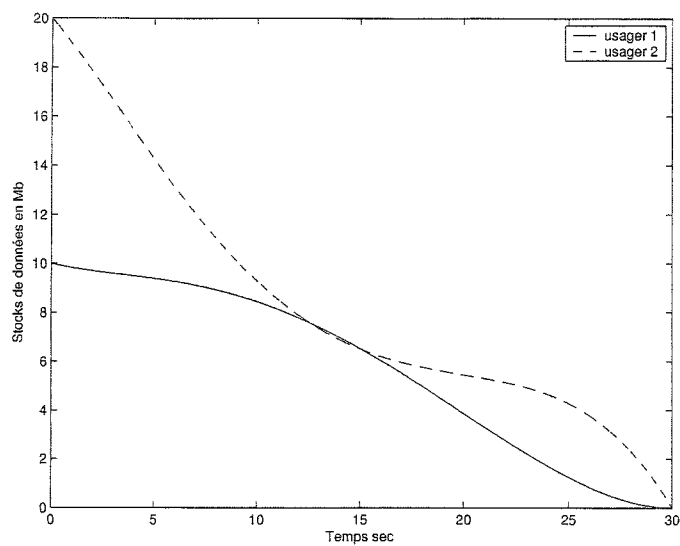


Figure 3.7 Stocks de données pour le cas de deux usagers

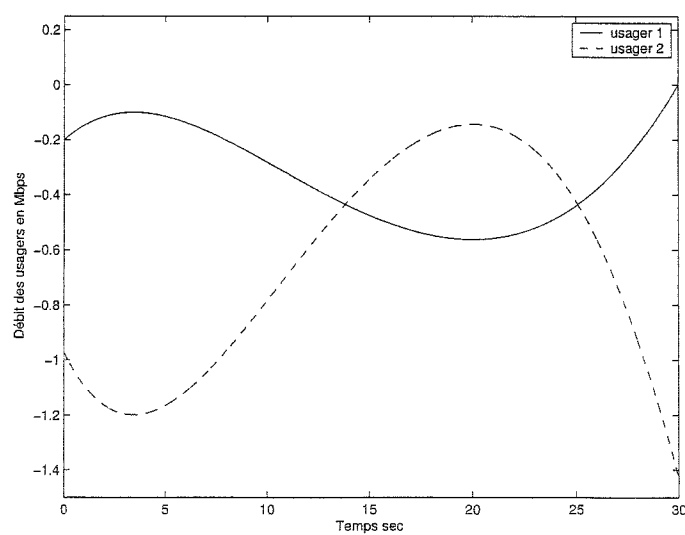


Figure 3.8 débits de données pour le cas de deux usagers

En conclusion, avec le critère quadratique (3.99) ou (3.101), nous sommes parvenus à exercer un contrôle plus étroit sur la dynamique des usagers individuels.

3.5 Synthèse de la commande par Scheduling

La commande qui va être mise en place réellement n'est certainement pas la commande qu'on a calculée dans le paragraphe d'avant, mais si on se réfère à la Proposition 1, il s'agira d'une commande qui va osciller d'un extrême (R_{1max}) à un autre (R_{2max}) (faute de quoi, les contraintes non linéaires sur les débits seraient violées).

L'idée est la suivante: étant donnée la courbe de débits pour les deux usagers, nous allons extraire de cette courbe, une commande qui fonctionne de la manière suivante sur l'intervalle $[t_0, t_0 + h]$:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= -R_{1max} & t_0 &\leq t \leq t_0 + D(t) \\ \dot{x}_1(t) &= 0 & t_0 + D(t) &\leq t \leq t_0 + h. \end{aligned} \quad (3.108)$$

et le problème, est de déterminer $D(t)$ pour qu'en moyenne effectivement on ait le débit qu'on voit sur la figure 3.8. C'est dire que nous allons reproduire le même contrôle que si nous étions sur la droite de contrainte (3.4), mais en injectant effectivement non pas la commande trouvée dans (3.105), mais la commande moyenne (4.75) qui va d'un extrême à un autre, sans violer les contraintes. La figure 3.9 explique la technique adoptée pour une fonction quelconque $x(t)$, qui donne une fonction équivalente en moyenne, qu'on appelle *fonction pulsée à largeur modulée*, où la largeur en question $D(t)$, varie d'un intervalle à un autre de manière à conserver la valeur moyenne, c'est à dire:

$$\int_{t_i}^{t_{i+1}} x(t) dt = G D_i \quad (3.109)$$

avec:

G : module de la fonction à largeur modulée, (une quantité fixe),

$[t_i, t_{i+1}]$: l'intervalle de découpage de longueur h qu'on fixe

D_i : intervalle de largeur variable, qui change d'un intervalle de découpage à un autre.

Donc étant donnée

$$\int_{t_i}^{t_{i+1}} x(t) dt = S(x), \quad (3.110)$$

il faudrait vérifier:

$$S(x) = S(G, D_i) \quad (3.111)$$

on obtiendra alors:

$$D_i = \frac{S(x)}{G} \quad (3.112)$$

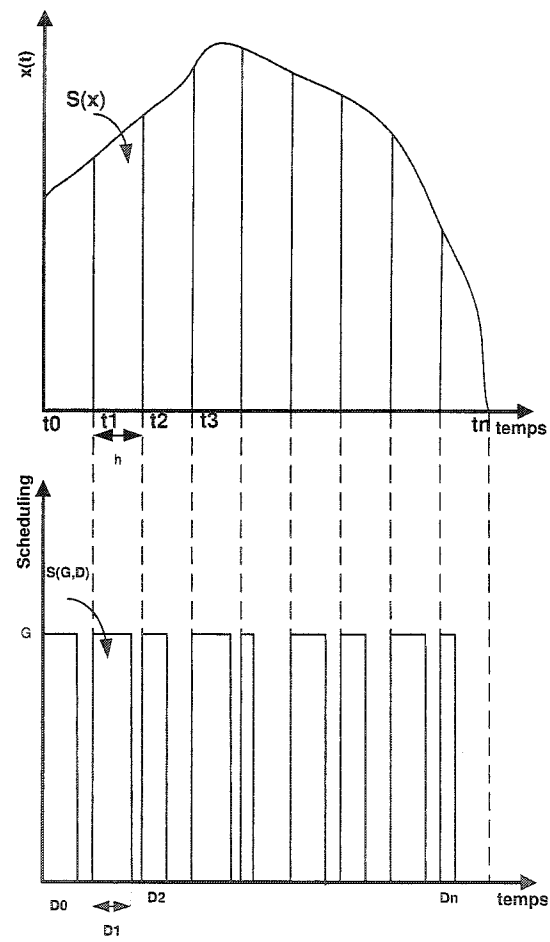


Figure 3.9 Génération d'une fonction pulsée à largeur modulée

Il est à noter ici que $S(x)$ est l'aire sous la courbe durant un intervalle de longueur h , et sa valeur change d'un intervalle à un autre; c'est pour cela que la fonction est appelée, fonction pulsée à largeur modulée.

Si on applique ce qu'on vient de voir au cas de notre système à deux usagers, sur la variable $x_2(t)$ qui représente le débit du premier usager, à un signe près, et si le pas est défini par:

$$h = \frac{T}{n}, \quad (3.113)$$

en intégrant sur l'intervalle $[t_i, t_{i+1}]$, on aura:

$$\int_{t_i}^{t_{i+1}} x_2(t) dt = x_{2max} D_i. \quad (3.114)$$

ici, on refait la même procédure sur l'intervalle $[t_i, t_{i+1}]$ de longueur $t_{i+1} - t_i = h$. Le module de la commande pulsée sera la valeur maximale permise de la variable $x_2(t)$.

En observant bien le modèle d'état du système, on pourra conclure que:

$$\begin{aligned} \int_{t_i}^{t_{i+1}} x_2(t) dt &= - \int_{t_i}^{t_{i+1}} \dot{x}_1(t) dt \\ &= x_1(t_i) - x_1(t_{i+1}). \end{aligned} \quad (3.115)$$

D'où finalement:

$$D_i = \frac{x_1(t_i) - x_1(t_{i+1})}{x_{2max}}. \quad (3.116)$$

On pourra facilement vérifier que l'accroissement de la variable $x_2(t)$ est conservé sur l'intervalle total T :

$$\int_0^T x_2(t) dt = \sum_{i=1}^n x_{2max} D_i \quad (3.117)$$

D'après la formule (3.116), qui est indépendante analytiquement de h , rien ne garantit que le D_i est plus petit que h . Montrons à présent la proposition suivante:

Proposition 3 *pour tout pas de modulation h , nous avons toujours*

$$D_i \leq h \quad (3.118)$$

Preuve: On utilisera le théorème des accroissements finis pour démontrer (3.118).

Soit

$$\begin{aligned} D(t_i) &= -\frac{x_1(t_{i+1})-x_1(t_i)}{x_{2max}} \\ &= -\frac{x_1(t_{i+1})-x_1(t_i)}{h} \frac{h}{x_{2max}} \end{aligned} \quad (3.119)$$

Comme on sait que la fonction $x_1(t)$ est dérivable et monotone (strictement décroissante) sur tout intervalle $]t_i, t_{i+1}[$, alors il existe forcément un temps $\bar{t}_i \in]t_i, t_{i+1}[$ tel que:

$$\begin{aligned} -\frac{x_1(t_{i+1})-x_1(t_i)}{h} &= -\dot{x}_1(\bar{t}_i) \\ &= x_2(\bar{t}_i) \end{aligned} \quad (3.120)$$

et sachant que:

$$\forall t \in [0, T], \quad x_2(t) \leq x_{2max} \quad (3.121)$$

alors

$$D_i = x_2(\bar{t}_i) \frac{h}{x_{2max}} \leq h \quad (3.122)$$

C.Q.F.D

Une démonstration plus rapide consistait à poser:

$$x_2(t) \leq x_{2max} \implies \int_{t_i}^{t_{i+1}} x_2(t) dt \leq x_{2max} h \quad (3.123)$$

et la conclusion est rapide à faire.

Nous avons effectué des simulations pour valider notre synthèse sur la commande discrète développée ci-haut.

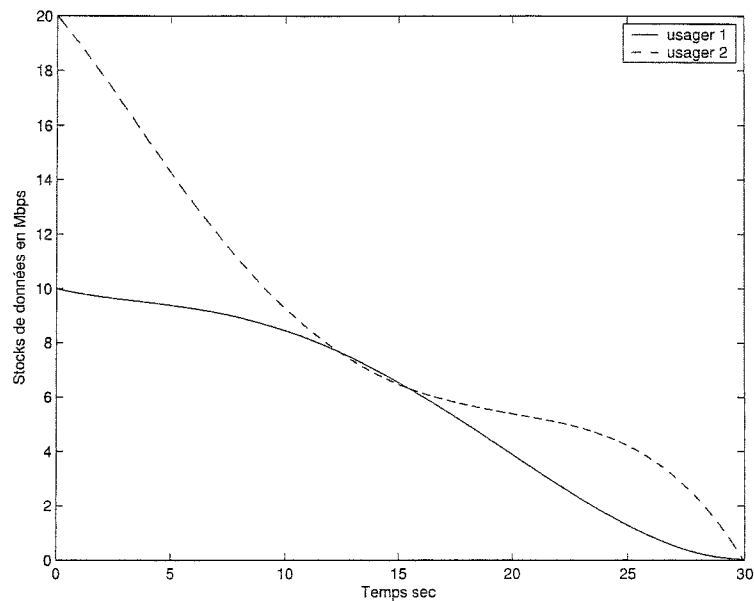


Figure 3.10 Courbes de stocks de données pour deux usagers avec commande pulsée à largeur modulée.

On peut voir que la réponse donnée par la commande pulsée qui passe du point de coordonnées $(x_{2max}, 0)$ vers le point $(0, x_{4max})$ à une fréquence très rapide est sensiblement identique à la commande synthétisée dans le paragraphe précédent où nous étions sur la droite de contrainte qui relie les deux points $(x_{2max}, 0)$ et $(0, x_{4max})$, si on observe les figures 3.10 et 3.7.

Il faudra noter que pour réaliser cette simulation, nous avons pris un pas de modulation $h = 50\Delta T$, avec ΔT , le pas d'intégration du système (3.102) sous la commande (3.105). La commande pulsée obtenue, effectue des passages très rapides. C'est pour cela que nous n'allons pas donner son graphique, mais l'allure demeure la même que celle de la figure 3.10.

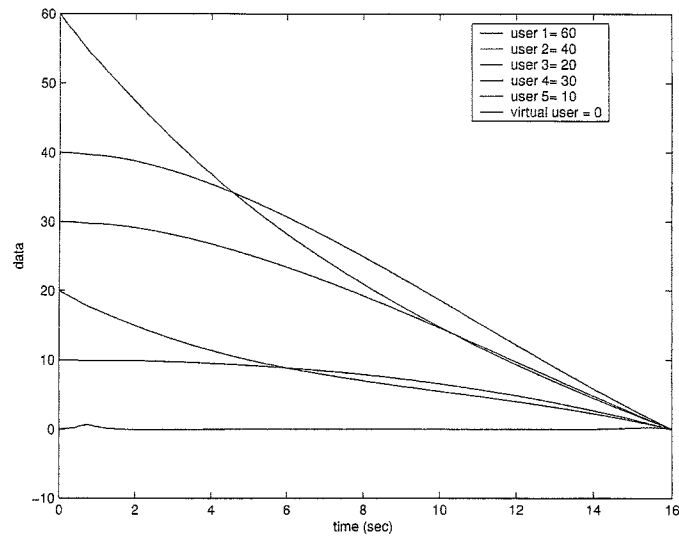


Figure 3.11 Courbes des stocks de données avec 5 usagers et un fictif.

3.6 Conclusion

Ce qu'on retiendra en premier lieu de ce chapitre, c'est la flexibilité apportée par le critère quadratique à horizon fini, car il permet, moyennant un choix judicieux des pondérations, de privilégier un usager sur un autre d'un point de vue stock de données initial ou condition de canal associé, tout en préservant tout de même une certaine équité. L'importance d'opérer par scheduling et à puissance maximale, est le second point essentiel dans notre synthèse, car cela nous a permis de transformer un problème de commande optimale avec temps final flottant et contraintes non linéaires sur les états, en un problème avec contraintes linéarisées et temps final fixe. Les contraintes linéarisées sont alors intégrées à la dynamique qui demeure linéaire, ceci permettant la synthèse d'une commande à temps de transmission minimal, et avec caractéristiques d'équité entre utilisateurs.

CHAPITRE 4

ALGORITHME DE CONTRÔLE CONJOINT PUISSANCE-DÉBIT EN LIEN DESCENDANT POUR LE CAS DE N USAGERS

Au Chapitre 3, nous avons traité le problème de transmission de données sur le lien descendant pour le cas de deux usagers seulement. Nous avons pu développer un algorithme qui permet à deux usagers d'utiliser conjointement le maximum de ressources, tout en tenant compte des contraintes physiques imposées par le réseau. Des formulations successives de plus en plus simplifiées, nous ont permis de ramener ce problème de transmission de données au cadre de la théorie classique du régulateur linéaire quadratique. La théorie en question, se généralise-t-elle au cas de N usagers, et le cas échéant, est-il possible de maintenir sous contrôle la complexité des calculs requis ? Ce sont les questions auxquelles nous apporterons réponse dans ce chapitre.

Nous verrons d'abord comment il est possible de généraliser le modèle dynamique de transmission et les contraintes d'état associés. Par la suite, nous montrerons comme pour le cas de deux usagers, que le problème de transmission optimale de données de la base vers les mobiles peut-être ramené au cadre de la théorie du régulateur linéaire quadratique. Cependant, il s'avérera utile d'introduire la notion d'utilisateur virtuel ou fictif, en vue de s'assurer plus aisément du maintien des contraintes de positivité des débits. Enfin, nous développerons un concept d'agrégation à partir duquel on montrera qu'un problème de transmission à N usagers, peut toujours se ramener à l'étude d'un problème connexe à trois usagers seulement. Cette façon de résoudre, permet d'optimiser le temps de calcul d'une manière significative, surtout quand on pense à la solution de l'équation différentielle de Riccati, qui

requiert de passer par la résolution d'un système Hamiltonien, qui, comme on sait, est de dimension deux fois plus grande que la dimension du système de base. Nous généraliserons le concept de scheduling utilisé au Chapitre 3, en vue de synthétiser les commandes pour les N usagers, en passant par le système agrégé.

4.1 Modélisation du système de lien descendant pour N usagers

Dans cette section, nous allons voir comment il est possible de généraliser le modèle de transmission, ainsi que les contraintes obtenus pour le cas de deux usagers, au cas de N usagers dans une cellule munie d'une station de base.

Comme pour le cas de deux usagers, le modèle de transmission de données sera un modèle d'état qui mettra en jeu, les quantités de données à transmettre et les débits de transmission. Les commandes seront les dérivées des débits de transmission.

$$\begin{aligned}
 \dot{x}_1 &= -x_2 \\
 \dot{x}_2 &= u_1 \\
 \dot{x}_3 &= -x_4 \\
 \dot{x}_4 &= u_2 \\
 &\vdots \\
 \dot{x}_{2N-1} &= -x_{2N} \\
 \dot{x}_{2N} &= u_N.
 \end{aligned} \tag{4.1}$$

Les contraintes de débit dans le cas de N usagers, vont s'avérer plus complexes.

Si on suppose que la station de base possède une puissance maximale P_{max} , les usagers doivent forcément vérifier:

$$P_1 + P_2 + \dots + P_N \leq P_{max}. \quad (4.2)$$

On posera pour la suite:

$$P_1 + P_2 + \dots + P_N = P_T. \quad (4.3)$$

Si nous reprenons l'expression du SIR (rapport signal / bruit) de chaque usager (3.11), tout en négligeant l'effet de l'auto-interférence et en considérant que les cellules adjacentes fonctionnent par scheduling et à puissance maximale, comme expliqué au Chapitre 3, soit:

$$SIR_i = \frac{g_i P_i}{\sum_{j=1, j \neq i}^N \theta_i g_i P_j + I_i + \eta} \quad (4.4)$$

et aussi, l'expression du débit maximal associé pour un rapport minimal d'énergie par bit sur densité spectrale d'interférence:

$$R_i = \frac{W}{\gamma} SIR_i. \quad (4.5)$$

En injectant (4.4) dans (4.5), nous obtenons:

$$R_i = \frac{W}{\gamma} \frac{g_i P_i}{\sum_{j=1, j \neq i}^N \theta_i g_i P_j + I_i + \eta} \quad (4.6)$$

On supposera que les interférences provenant des autres cellules sont constantes, ainsi que le bruit de fond, c'est ainsi qu'on posera:

$$I = I_i + \nu. \quad (4.7)$$

À partir de (4.6), on peut extraire P_i :

$$P_i = \frac{\gamma}{W g_i} R_i (I + \theta_i g_i \sum_{j=1, j \neq i}^N P_j). \quad (4.8)$$

On sait que:

$$\sum_{j=1, j \neq i}^N P_j = P_T - P_i, \quad (4.9)$$

alors:

$$P_i = \frac{\gamma}{W g_i} R_i (I + \theta_i g_i (P_T - P_i)). \quad (4.10)$$

On obtient alors la puissance de l'utilisateur i en fonction de son débit et de la puissance totale des usagers:

$$P_i = \frac{\frac{\gamma}{W g_i} R_i (I + \theta_i g_i P_T)}{1 + \frac{\gamma \theta_i}{W} R_i} \quad (4.11)$$

En opérant la somme des puissances sur tous les usagers, on trouve:

$$\sum_{i=1}^N P_i = \sum_{i=1}^N \frac{\frac{\gamma}{W g_i} R_i (I + \theta_i g_i P_T)}{1 + \frac{\gamma \theta_i}{W} R_i}, \quad (4.12)$$

et en utilisant (4.3) dans (4.12), nous aurons:

$$P_T = \sum_{i=1}^N \frac{\frac{\gamma I}{W g_i} R_i}{1 + \frac{\gamma \theta_i}{W} R_i} + P_T \sum_{i=1}^N \frac{\frac{\gamma \theta_i}{W} R_i}{1 + \frac{\gamma \theta_i g_i}{W g_i} R_i}. \quad (4.13)$$

Étant donnée la contrainte de puissance totale (4.2), (4.13) nous donne:

$$\sum_{i=1}^N \frac{\frac{\gamma I}{W g_i} R_i}{1 + \frac{\gamma \theta_i}{W} R_i} + P_T \sum_{i=1}^N \frac{\frac{\gamma \theta_i}{W} R_i}{1 + \frac{\gamma \theta_i}{W} R_i} \leq \sum_{i=1}^N \frac{\frac{\gamma I}{W g_i} R_i}{1 + \frac{\gamma \theta_i}{W} R_i} + P_{max} \sum_{i=1}^N \frac{\frac{\gamma \theta_i}{W} R_i}{1 + \frac{\gamma \theta_i}{W} R_i}, \quad (4.14)$$

et donc:

$$P_T \leq \sum_{i=1}^N \frac{\frac{\gamma I}{W g_i} R_i}{1 + \frac{\gamma \theta_i}{W} R_i} + P_{max} \sum_{i=1}^N \frac{\frac{\gamma \theta_i}{W} R_i}{1 + \frac{\gamma \theta_i}{W} R_i}. \quad (4.15)$$

Nous avons obtenu dans (4.15) une borne supérieure de P_T et comme il faut toujours vérifier la condition (4.2), alors il suffira de majorer la borne supérieure par P_{max} :

$$\sum_{i=1}^N \frac{\frac{\gamma I}{W g_i} R_i}{1 + \frac{\gamma \theta_i}{W} R_i} + P_{max} \sum_{i=1}^N \frac{\frac{\gamma \theta_i}{W} R_i}{1 + \frac{\gamma \theta_i}{W} R_i} \leq P_{max} \quad (4.16)$$

qui est la nouvelle contrainte sur les débits, et qui est de la forme:

$$\sum_{i=1}^N \frac{\alpha_i R_i}{1 + \beta_i R_i} \leq P_{max}. \quad (4.17)$$

avec:

$$\begin{aligned}\alpha_i &= \frac{\gamma I}{W g_i} + P_{max} \gamma \theta_i g_i \\ \beta_i &= \frac{\gamma \theta_i}{W}.\end{aligned}\tag{4.18}$$

Cette expression peut-être mise sous la forme suivante:

$$\sum_{j=1}^N \alpha_j R_j \prod_{i=1, i \neq j}^N (1 + \beta_i R_i) \leq P_{max} \prod_{i=1}^N (1 + \beta_i R_i),\tag{4.19}$$

qui elle même donne:

$$\sum_{\nu_i \in I_N} \zeta_{\nu} R_1^{\nu_1} R_2^{\nu_2} \cdots R_N^{\nu_N} \leq P_{max},\tag{4.20}$$

avec:

$$I_N = \{0, 1, \dots, N\}.\tag{4.21}$$

qui est un polynôme multivariable d'ordre N.

On peut constater cependant d'après l'équation (4.17), qu'il s'agit d'une somme de N formes hyperbolique de dimension 1, car si on fait la projection de cette surface polynômiale sur le plan (cas de deux usagers), nous obtenons bien une forme hyperbolique $\alpha_1 R_1 / (1 + \beta_1 R_1) + \alpha_2 R_2 / (1 + \beta_2 R_2)$, qui est bien la contrainte qu'on avait trouvée au Chapitre 3. Donc ici aussi, nous n'allons pas travailler avec la contrainte polynomiale (4.20), mais plutôt, avec l'hyperplan (contrainte linéaire), qui relie les points extrêmes de ces polynômes; ce dernier sera déterminé comme suit:

Pour chaque usager individuel, la physique du processus suggère que le débit maximum possible est atteint lorsque tous les autres usagers ne reçoivent aucun débit. Dans ce cas (4.17) et (4.18) donnent:

$$R_{imax} = \frac{P_{max}}{\frac{\gamma I}{W g_i} + \gamma \theta_i P_{max} (g_i - \frac{1}{W})}, \quad i = 1, \dots, n. \quad (4.22)$$

La portion de l'hyperplan maximal admissible \mathcal{H}_{AD} qui représente le lieu géométrique des débits moyens maximaux, sera générée par commutation à haute fréquence entre les vecteurs débits R^N que nous appellerons vecteurs débits extrêmes:

$$V_{ext-i}^T = \begin{bmatrix} \underbrace{0 \cdots 0}_{i-1} & R_{imax} & 0 \cdots 0 \end{bmatrix}, \quad i = 1, \dots, N. \quad (4.23)$$

Il correspond à toutes les combinaisons convexes de ces vecteurs extrêmes. Plus précisément:

$$\mathcal{H}_{AD} = \left\{ V \in R^N \text{ tel que } \exists \mu_i, 0 \leq \mu_i \leq 1, i = 1, \dots, N \mid V = \sum_{i=1}^N \mu_i V_{ext-i} \right\}. \quad (4.24)$$

On peut aisément vérifier que l'hyperplan complet satisfait:

$$\sum_{i=1}^N \frac{R_i}{R_{imax}} = 1. \quad (4.25)$$

Puisque l'hyperplan en question est défini par le fait qu'il passe par les N points de coordonnées définie, en (4.23), condition satisfaite par (4.25). Pour obtenir \mathcal{H}_{AD} à

partir de (4.25), il suffit d'ajouter les contraintes d'inégalité:

$$0 \leq R_i \leq R_{imax} \quad i = 1, \dots, N-1. \quad (4.26)$$

En effet, si $V_0 = \sum_{i=1}^N \mu_{i0} V_{ext}$, alors en définissant le point de coordonnées

$$\left[\mu_{10} R_{1max}, \mu_{20} R_{2max}, \dots, \mu_{N0} R_{Nmax} \right]^T,$$

on voit qu'il satisfait (4.25) et (4.26).

Inversement, tout point de coordonnées

$$V = \left[R_{10}, R_{20}, \dots, R_{N0} \right]^T,$$

satisfaisant (4.25) et (4.26) fournit des valeurs $0 \leq \mu_{i0} = \frac{R_{i0}}{R_{imax}} \leq 1$, telles que $\sum_{i=1}^N \mu_{i0} = 1$ et $V = \sum_{i=1}^N \mu_{i0} V_{ext-i}$.

On a donc:

Proposition 4 *La portion de l'hyperplan de débits moyens maximaux admissibles pour le système de transitions à N usagers est définie par (4.25) et (4.26).*

4.2 Formulation du problème de transmission optimale des données pour N usagers

En se fondant sur la théorie développée pour le cas de deux usagers au Chapitre 3, où l'on reconnaît que le temps de transmission minimum est réalisé en travaillant constamment sur l'hyperplan maximal admissible \mathcal{H}_{AD} , et que d'autre part, ce

temps minimum est donné par:

$$T = \sum_{i=1}^N \left(\frac{x_{2i-1}(0)}{R_{imax}} \right), \quad (4.27)$$

le problème de transmission optimale des données pour N usagers s'exprime comme suit:

$$\min_u \left\{ J(x_0) = \int_0^T [x^T Q x + u^T R u] dt + x^T(T) M x(T) \right\}, \quad (4.28)$$

avec les contraintes dynamiques:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -x_2 \\ \dot{x}_2 &= u_1 \\ \dot{x}_3 &= -x_4 \\ \dot{x}_4 &= u_2 \\ &\vdots \\ \dot{x}_{2N-1} &= R_{Nmax} \left[1 - \sum_{i=1}^{N-1} \frac{x_{2i}}{R_{imax}} \right] \triangleq - \sum_{i=1}^{N-1} \left(\frac{R_{Nmax}}{R_{imax}} \right) x_{2i} + x_{2N} \\ \dot{x}_{2N} &= 0. \end{aligned} \quad (4.29)$$

et les contraintes d'inégalité:

$$0 \leq x_{2i} \leq R_{imax} \quad i = 1, \dots, N-1. \quad (4.30)$$

La solution à ce problème est bien connue maintenant,

$$\begin{aligned}
u^*(t) &= -K(t)x(t) \\
K(t) &= R^{-1}B^T P(t)x(t)
\end{aligned}
\tag{4.31}$$

avec $P(t)$ vérifiant l'équation différentielle de Riccati suivante:

$$\begin{aligned}
\dot{P} &= A^T P + P A - P B R^{-1} B^T P + Q \\
P(T) &= M.
\end{aligned}
\tag{4.32}$$

Nous présenterons des simulations pour le cas de 5 usagés avec les valeurs suivantes:

Usager	quantité de données	g_i
1	10	0.2
2	20	0.35
3	30	0.8
4	40	0.55
5	50	0.69

Les pondérations qu'on a utilisées:

$$Q = 10^{-4} I_{10 \times 10}$$

$$R = 10 I_{4 \times 4}$$

$$I = 1dB.$$

Le temps optimal, calculé à priori selon la formule (4.27) est de: 100.1827.

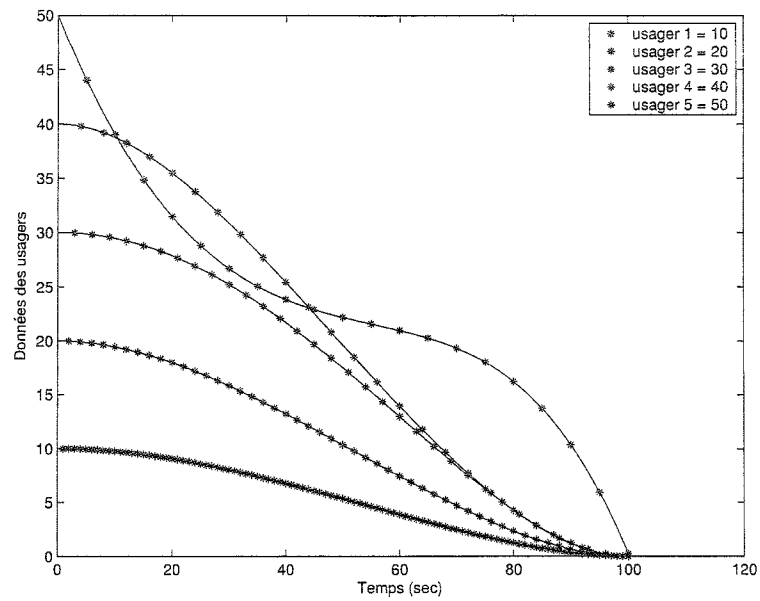


Figure 4.1 Stock de données pour le cas de 5 usagers

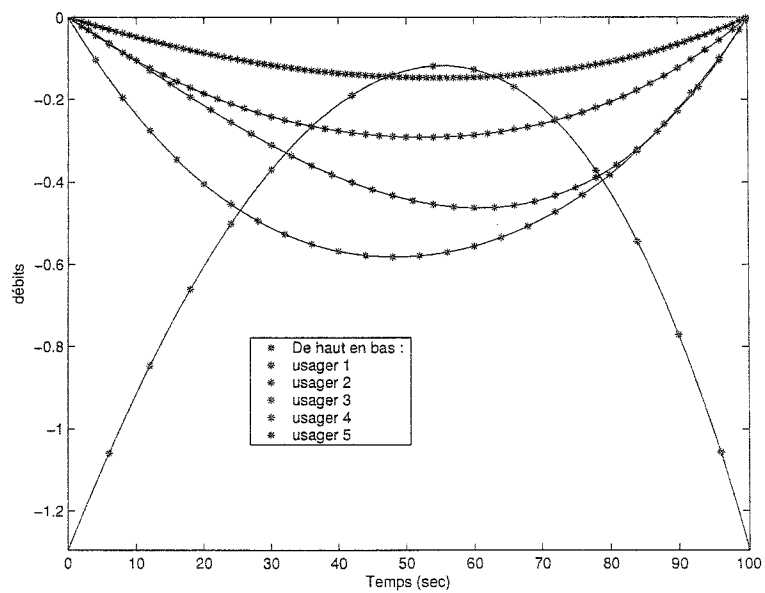


Figure 4.2 Débits de transmission pour le cas de 5 usagers

Si on observe la figure 4.1, qui montre les quantités de données transmises de la station de base vers les usagers, on constate que tous les mobiles ont transmis pendant le même intervalle de temps T calculé par (4.27), et ceci à partir de conditions initiales différentes et des conditions de canaux différentes aussi. Cependant, on pourra remarquer que tous les usagers se comportent de la même manière, sauf le dernier usager qui débute à la condition initiale de 50 en suivant une courbe possédant un point d'inflexion. On peut facilement interpréter ce comportement marginal par le biais des débits qu'on peut voir sur la figure 4.2. On peut voir initialement les débits des autres usager sont à 0 (on aurait pu leur attribuer un débit initial dans l'ensemble des débits admissibles, mais le raisonnement ne change pas), tandis que le dernier usager a un débit initial de -1.27 . Ce qu'on observe sur la courbe des stocks 4.1, est qu'initialement la tangente au point 0 pour les usagers est nulle tandis que pour le dernier est non nulle. Ce dernier démarre donc plus vite que tout le monde, mais un moment donné comme on le voit toujours sur la figure des stocks, il a rattrapé un usager et il est en passe d'en rattraper un autre (tout dépendra aussi du stock initial de chacun d'eux). À ce moment là la commande optimale a tendance à modifier le débit de cet usager plus que les autres de manière à ralentir cette vitesse, d'où le point d'inflexion (changement de courbure), et ceci se voit facilement sur la courbe de débit. Il a atteint son maximum à un temps proche de 55, (c'est le même temps pour lequel l'inflexion a lieu), et à cet instant presque tous les usagers sont à leur plus bas débit, car ne l'oublions pas, le débit du dernier est une *combinaison linéaire des débits des autres usagers*. Après cela, on on peut voir sur la courbe de stocks que le dernier usager s'attarde un peu (le débit décroît) pour se retrouver le plus en retard dans la transmission. C'est ainsi que les débits des autres usagers deviennent de plus en plus petits, ce qui s'explique par la combinaison linéaire des débits du dernier devient de plus en plus grand; ce qui lui permettra de rattraper les autres pour qu'enfin il se retrouve avec un débit similaire au débit initial qui est égal à $deb = -1.27$ et les autres aussi à leur débit

initial, à l'instant final T .

On peut conclure à présent que le dernier usager semble tenir un rôle important dans le réseau. Comment ce dernier usager réagirait-il si, par le hasard des choses, il possédait le stock de données le plus petit dans le réseau, (dans ce cas de figure que nous venons d'étudier, il possédait le stock le plus gros). C'est le cas de figure étudié dans la simulation Figure 4.3, où on inverse les stocks entre le premier joueur et le dernier, ce qui leur donne respectivement des stocks initiaux de 50 et 10.

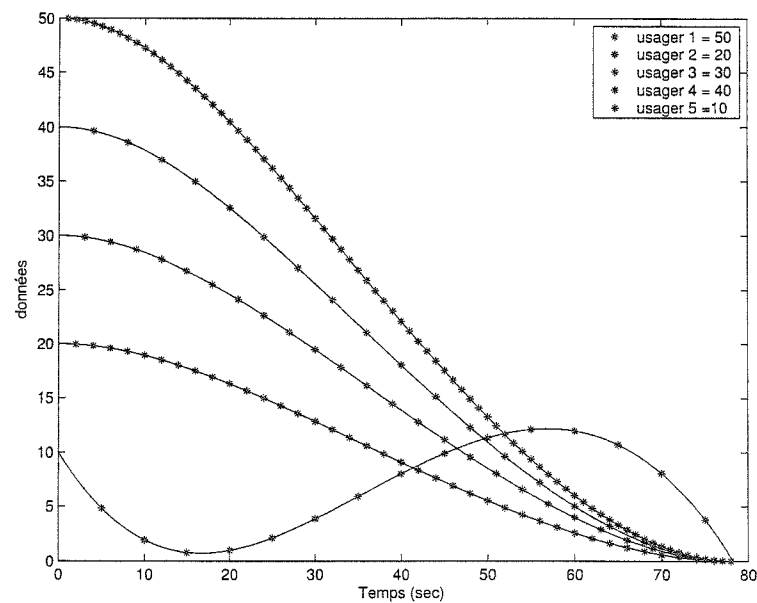


Figure 4.3 Stock de données pour le cas de 5 usagers

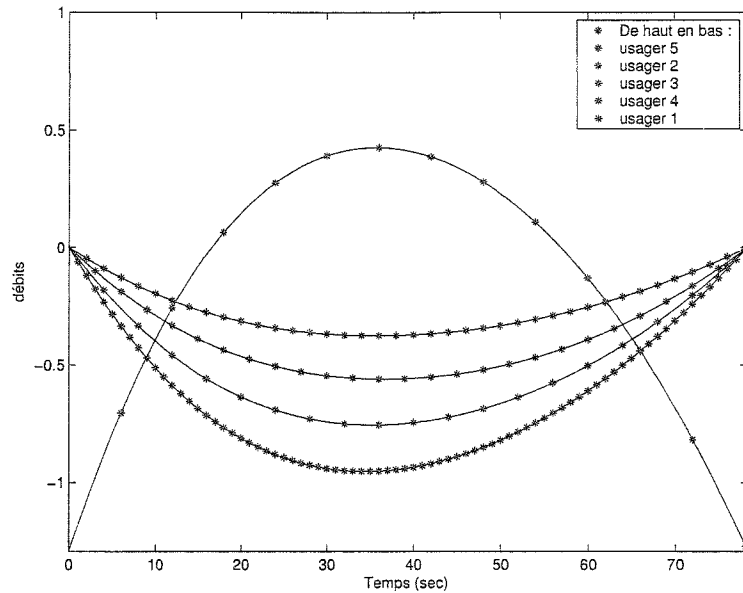


Figure 4.4 Débits de transmission pour le cas de 5 usagers

On observera avant tout, que le temps de transmission a changé, dû au fait qu'un usager avec un $g_i = 0.2$ pour le premier usager ne permet pas de transmettre la même quantité de données qu'un usager avec un $g_i = 0.69$, dans un même temps.

En second lieu, comme on s'attendait à le voir, le dernier usager présente un profil similaire à la figure 4.1, sauf que, vu qu'à présent il possède le stock de données le plus petit dans le réseau, il n'est qu'à 10 unités de zéro. En quelque sorte il est avantagé par rapport aux autres; il est donc obligé d'attendre les autres pour qu'ils se vident tous en même temps à l'instant T , et donc à cause de la pénalisation sur la variabilité de la commande, il aura tendance à aller remplir son stock pour ensuite le vider, ce qui lui permettra de perdre du temps. Ce comportement n'a pas lieu d'être physiquement sachant que la station de base est entrain d'envoyer seulement une quantité de données égale à 10 initialement, et il n'y a aucune arrivée de données ultérieures. Le comportement du dernier usager peut donc violer des contraintes physiques, si par le hasard des choses il est associé à un stock initial

petit et un débit initial relativement élevé.

L'observation de la figure 4.3 indique bien l'homogénéité des comportements de tous les usagers, excepté le dit dernier usager qui semble devoir constamment compenser les écarts des autres usagers par rapport aux contraintes. De plus, dans une situation réelle, nous avons aucun contrôle sur ses conditions initiales de stock et de débit. Se pourrait-il alors qu'en introduisant un usager fictif que l'on pourrait à volonté faire partir d'un stock nul, qui jouerait le rôle joué par le dernier usager dans le schéma précédant, mais dont on pénaliserait très fortement tout écart d'état par rapport à zéro, on puisse satisfaire les contraintes sans indûment pénaliser un usager réel pour autant ? c'est ce que nous explorons à la sous-section suivante.

4.2.1 La notion d'usager fictif

La notion d'usager fictif est introduite ici afin de résoudre le problème de non controllabilité du dernier usager, qui présente selon la quantité de données initiale, un profil non désirable, et dont on ne veut pas qu'un usager quelconque en soit victime, dans le sens où tous les usagers sont sensé recevoir un service adéquat. Pour ce faire, nous introduisons un usager additionnel fictif, associé à un stock de données nul et un débit initial nul, qui, moyennant un choix pertinent des pondération sur cet état et sur les débits des autres usagers, ferait en sorte de le maintenir à zéro sur tout le long du temps T . La la raison pour laquelle, nous ne voulons pas qu'il y ait des excursions indésirables dans la courbe de transmission pour le dernier usager, même s'il est fictif, est que ces excursions impliquent des pertes de puissance pour les autres usagers, ce qui les priverait de ressources additionnelles.

L'usager fictif aura donc:

$$\begin{aligned}x_{2N-1}(0) &= 0 \\ \dot{x}_{2N-1}(0) &= 0\end{aligned}\tag{4.33}$$

Sachant que le débit de l'utilisateur fictif dépend des débits des autres usagers, selon:

$$\dot{x}_{2N-1} = - \sum_{i=1}^{N-1} \left(\frac{R_{Nmax}}{R_{imax}} \right) x_{2i} + x_{2N},\tag{4.34}$$

alors, un moyen de vérifier la condition initiale sur le débit de l'utilisateur fictif de l'équation (4.33) est de poser:

$$x_{2i}(0) = \frac{R_{iNmax}}{N-1}\tag{4.35}$$

Si on reprend le cas de 5 usagers, nous obtenons les simulations sur les figures (4.5) et (4.6). Tel qu'espéré, l'utilisateur fictif part de zéro, et demeure à zéro, ce qui garantit la satisfaction de la contrainte (4.34) sans pour autant pénaliser un usager réel. L'utilisateur fictif permet donc de rééquilibrer la dynamique.

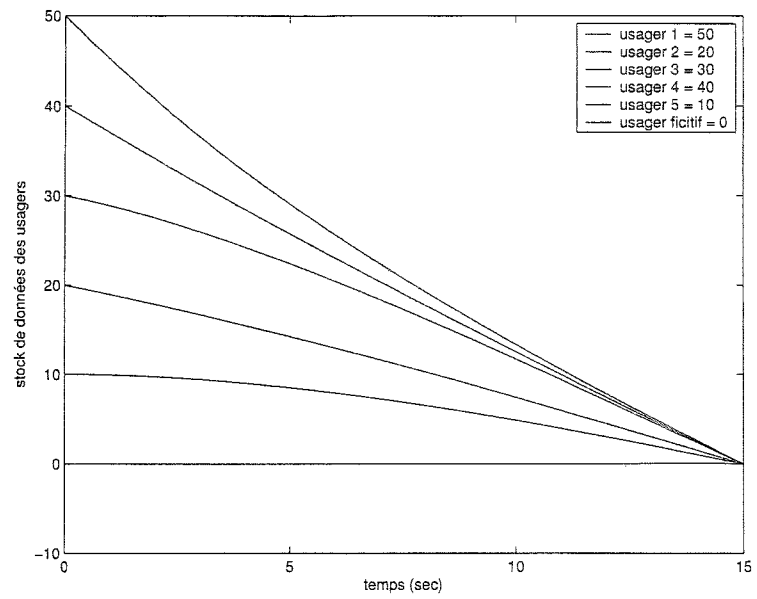


Figure 4.5 Stock de données pour le cas de 5 usagers avec un usager fictif

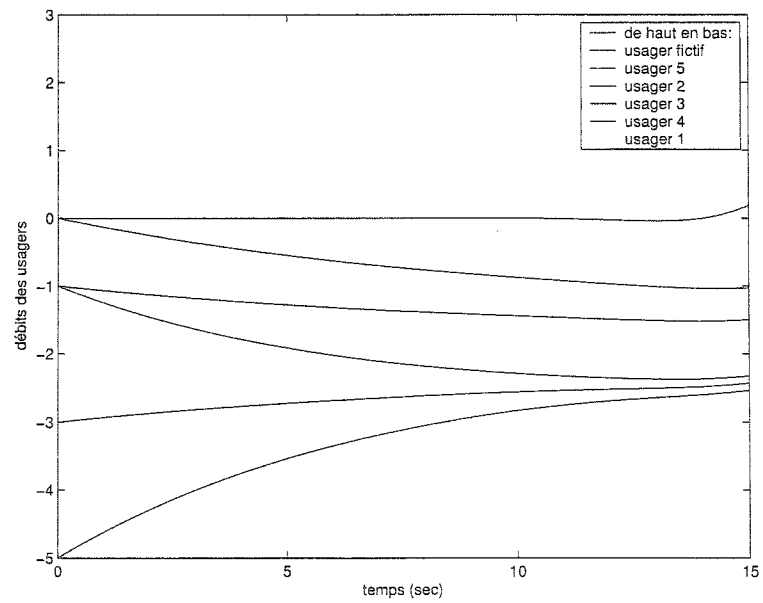


Figure 4.6 Débits de transmission pour le cas de 5 usagers avec un usager fictif

4.3 Modèle agrégé connexe

Nous allons introduire dans cette section, un concept d'agrégation directement utile pour limiter la complexité des calculs lorsque N devient grand. Si on observe la résolution qui a été mise en place pour la commande optimale à action terminale avec pondération sur les état (LQR), celle-ci est obtenue en construisant une matrice hamiltonienne, puis en résolvant un système différentiel linéaire (voir Chapitre 2). Ainsi, si on reprend brièvement la solution du problème suivant:

$$\min_u \left\{ J(x_0) = \int_0^T x^T Q x + u^T R u \, dt + x^T(T) M x(T) \right\} \quad (4.36)$$

sous les contraintes du système dynamique

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad x(0) = x_0 \quad (4.37)$$

Ce problème admet la solution suivante:

$$\begin{aligned} u^*(t) &= -K(t)x(t) \\ K(t) &= R^{-1}B^T P(t) \end{aligned} \quad (4.38)$$

où $P(t)$ est solution de l'équation différentielle matricielle de Riccati suivante:

$$\begin{aligned} \dot{P} &= A^T P + P A - P B R^{-1} B^T P + Q \\ P(T) &= M \end{aligned} \quad (4.39)$$

On associe à chaque équation de Riccati (4.39), la matrice Hamiltonienne suivante:

$$H = \begin{bmatrix} A & -BR^{-1}B^T \\ -Q & -A^T \end{bmatrix}. \quad (4.40)$$

La résolution de l'équation de Riccati non linéaire (4.39), passe par la résolution du système différentiel linéaire suivant:

$$\begin{bmatrix} \dot{X} \\ \dot{Y} \end{bmatrix} = H \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} \quad (4.41)$$

avec:

$$\begin{aligned} X(T) &= I, \\ Y(T) &= M \end{aligned} \quad (4.42)$$

pour donner enfin

$$P(t) = Y(t)X^{-1}(t). \quad (4.43)$$

C'est la procédure qui a été mise en place pour toutes nos solutions. Cependant, si la dimension du système dynamique est $n \times n$, il en découle que la matrice hamiltonienne possédera une dimension de l'ordre de $2n \times 2n$, et donc pour résoudre des équation de Riccati pour des systèmes à 10 usagers, il faudra résoudre un système différentiel de 20×20 . On imagine alors les conséquences si on double ou en triple le nombre d'usagers...

Pour cela, nous développerons la notion de système agrégé connexe. Ce dernier met en jeu uniquement trois usagers. Il s'avère que la solution pour le système agrégé

(dimension 6), permet de reconstruire la solution pour un système de dimension $2N$ arbitraire.

4.3.1 Système agrégé connexe pour le cas de N usagers ayant les mêmes g_i

Nous commencerons par le cas de N usagers possédant le même g_i , c'est à dire que les usagers se trouvent sur un cercle autour de la station de base. Si on observe l'équation différentielle de Riccati (4.39), on peut constater que celle-ci est indépendante des conditions initiales. Il en est de même pour le gain K du retour d'état. Imaginons donc le scénario suivant: tous les usagers ont *le même* g_i et *la même condition initiale*. Dans ces conditions, on a:

$$\begin{aligned}
 \dot{x}_1 &= -x_2 \\
 \dot{x}_2 &= u_1 \\
 \dot{x}_3 &= -x_4 \\
 \dot{x}_4 &= u_2 \\
 &\vdots \\
 \dot{x}_{2N-1} &= x_2 + x_4 + \cdots + x_{2N-2} + x_{2N} \\
 \dot{x}_{2N} &= 0, \quad x_{2N}(0) = -R_{Nmax}.
 \end{aligned} \tag{4.44}$$

avec les conditions initiales:

$$\begin{aligned}
 x_{2i-1}(0) &= x_{2j-1}(0) & i \neq j, \quad i, j = 1, \dots, N-1 \\
 x_{2i}(0) &= x_{2j}(0) & i \neq j, \quad i, j = 1, \dots, N-1 \\
 x_{2N}(0) &= -R_{Nmax}.
 \end{aligned} \tag{4.45}$$

et le critère d'optimisation (4.36) demeure le même avec:

$$Q = \begin{bmatrix} q_1 & & & \\ & q_2 & & 0 \\ & & \ddots & \\ 0 & & & q_1 & \\ & & & & q_2 \end{bmatrix}, \quad (4.46)$$

$$R = r \ I_{(N-1) \times (N-1)} \quad (4.47)$$

avec I matrice identité,

$$M = \begin{bmatrix} q_{F1} & & & \\ & q_{F2} & & 0 \\ & & \ddots & \\ 0 & & & q_{F1} & \\ & & & & q_{F2} \end{bmatrix}. \quad (4.48)$$

On peut donc dire qu'il n'y a aucune différence entre un usager et un autre parmi tous les usagers qui possèdent la même structure, sauf le dernier bien sûr qui possède une structure différente.

pour $i = 1, \dots, N - 1$:

$$\begin{aligned} \dot{x}_{2i-1} &= -x_{2i} \\ \dot{x}_{2i} &= u_i. \end{aligned} \quad (4.49)$$

Le dernier usager possède la structure suivante:

$$\begin{aligned}\dot{x}_{2N-1} &= -x_{2N} \\ \dot{x}_{2N} &= 0.\end{aligned}\tag{4.50}$$

Les lois de la commande optimale ont la forme suivante

$$\begin{aligned}u_1^* &= K_{1,1}x_1 + \cdots + K_{1,2N-2}x_{2N-2} + K_{1,2N-1}x_{2N-1} + K_{1,2N}x_{2N} \\ &\vdots \\ u_i^* &= K_{i,1}x_1 + \cdots + K_{i,i}x_i + \cdots + K_{i,2N-1}x_{2N-1} + K_{i,2N}x_{2N} \\ &\vdots \\ u_{N-1}^* &= K_{N-1,1}x_1 + \cdots + K_{N-1,2N-2}x_{2N-2} + K_{N-1,2N-1}x_{2N-1} + K_{N-1,2N}x_{2N}.\end{aligned}\tag{4.51}$$

et comme les états $x_1, x_3, \dots, x_{2N-3}$ sont identiques, de même que les états $x_2, x_4, \dots, x_{2N-2}$. Alors on peut définir les coefficients d'influence ci-dessous, pour $i = 1, \dots, N-1$:

- le coefficient de l'état x_{2i-1} sur sa commande u_i^* est K_1 ,
- le coefficient de l'état x_{2i} sur sa commande u_i^* est K_2 ,
- le coefficient des autres états x_{2j-1} , $j \neq i, j = 1, \dots, N-2$ sur la commande u_i^* est K_3 ,
- le coefficient des autres états x_{2j} , $j \neq i, j = 1, \dots, N-2$ sur la commande u_i^* est K_4 ,
- le coefficient de l'état x_{2N-1} sur la commande u_i^* est K_5 , et,
- le coefficient de l'état x_{2N} sur la commande u_i^* est K_6 .

Il est alors intéressant, de poser la question suivante:

Est-il possible de calculer les gains du système à N usagers, à partir d'un système à 3 usagers seulement ?

Pour cela, nous avons le résultat suivant:

Théorème 2 (*Théorème de l'agrégation*) *Soit la fonctionnelle suivante, associée au système (4.44), dont la forme est:*

$$\begin{aligned} & \int_0^T \left[q_1 \left(\sum_{i=1}^{N-1} x_{2i-1}^2 \right) + q_2 \left(\sum_{i=1}^{N-1} x_{2i}^2 \right) + q_3 x_{2N-1}^2 + q_4 x_{2N}^2 + r \left(\sum_{i=1}^{N-1} u_i^2 \right) \right] dt + \\ & q_{F1} \left(\sum_{i=1}^{N-1} x_{2i-1}^2(T) \right) + q_{F2} \left(\sum_{i=1}^{N-1} x_{2i}^2(T) \right) + q_{F3} x_{2N-1}^2(T) + q_{F4} x_{2N}^2(T). \end{aligned} \quad (4.52)$$

Alors, il est possible de calculer les gains du retour d'état du problème de commande optimale (4.44), (4.54), à partir du calcul de gains pour le problème de commande optimale auxiliaire suivant, sur un système d'ordre 6, dont la dynamique est la suivante:

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= -z_2 \\ \dot{z}_2 &= v_1 \\ \dot{z}_3 &= -z_4 \\ \dot{z}_4 &= v_2 \\ \dot{z}_5 &= z_2 + (\sqrt{N-2})z_4 + z_6 \\ \dot{z}_6 &= 0. \end{aligned} \quad (4.53)$$

avec la fonction coût suivante:

$$J_z = \int_0^T [q_1 (z_1^2 + z_3^2) + q_2 (z_2^2 + z_4^2) + q_3 z_5^2 + q_4 z_6^2 + r (v_1^2 + v_2^2)] dt + q_{F1} (z_1^2(T) + z_3^2(T)) + q_{F2} (z_2^2(T) + z_4^2(T)) + q_{F3} z_5^2(T) + q_{F4} z_6^2(T). \quad (4.54)$$

Soit $K_i(t)$, $i = 1, \dots, 6$, les gains du retour d'état pour le problème de commande optimale (4.53), (4.54), alors, les gains du retour d'état pour le problème de commande optimale (4.44), (4.54) sont donnés par:

$$\begin{aligned} K_{2i-1 \ 2i-1} &= K_1 \\ K_{2i \ 2i} &= K_2 \\ K_{i \ 2j-1} &= \frac{K_3}{\sqrt{N-2}} \quad i \neq j, \ i, j = 1, \dots, N \\ K_{i \ 2j} &= \frac{K_4}{\sqrt{N-2}} \\ K_{i \ 2N-1} &= K_5 \\ K_{i \ 2N} &= K_6. \end{aligned} \quad (4.55)$$

Preuve: Le théorème veut tout simplement dire, qu'il est possible de faire une correspondance entre un modèle à N usagers et un modèle à 3 usagers. Si on observe le modèle (4.44), on pourra constater qu'il existe trois sortes d'usagers d'un point de vue structurel, à savoir: un usager quelconque ayant la structure (4.49), un usager ayant la structure (4.50), et l'usager fictif.

Comme les conditions initiales peuvent être supposées identiques *sans pour autant affecter les gains de la commande*, et les pondérations sont identiques, alors il n'y a aucune différence entre les usagers ayant la même structure. On pourra donc écrire pour le système (4.44):

$$\begin{aligned}
x_3 &= x_5 = \cdots = x_{2N-3} \\
x_4 &= x_6 = \cdots = x_{2N-2} \\
u_2 &= u_3 = \cdots = u_{N-1}.
\end{aligned} \tag{4.56}$$

Si nous voulons qu'il y ait une correspondance entre les deux problèmes, il est nécessaire de déterminer les nouvelles variables z_i du problème agrégé connexe, afin qu'il y ait conservation de la fonction coût, c'est à dire:

$$J_z = J, \tag{4.57}$$

et donc, ayant:

$$\begin{aligned}
J = \int_0^T \sum_{i=1}^{N-1} q_1 x_{2i-1}^2 + q_2 x_{2i}^2 + q_3 x_{2N-1} + r u_i^2 \, dt + \\
q_{F1} \left(\sum_{i=1}^{N-1} x_{2i-1}^2(T) \right) + q_{F2} \left(\sum_{i=1}^{N-1} x_{2i}^2(T) \right) + q_{F3} x_{2N-1}^2.
\end{aligned} \tag{4.58}$$

En injectant (4.56) dans (4.58), on trouvera:

$$\begin{aligned}
J = \int_0^T q_1 x_1^2 + (N-2)q_1 x_3^2 + q_2 x_2^2 + (N-2)q_2 x_4^2 + q_3 x_{2N-1} + r u_1^2 + (N-2)r u_2^2 \, dt + \\
q_{F1} x_1^2(T) + q_{F1}(N-2)x_3^2(T) + q_{F2} x_2^2(T) + q_{F2}(N-2)x_4^2(T).
\end{aligned} \tag{4.59}$$

Posons alors:

$$\begin{aligned}
z_1 &= x_1 \\
z_2 &= x_2 \\
z_3 &= \sqrt{N-2} \, x_3 \\
z_4 &= \sqrt{N-2} \, x_4 \\
z_5 &= x_{2N-1} \\
z_6 &= x_{2N} \\
v_1 &= u_1 \\
v_2 &= \sqrt{N-2} u_2
\end{aligned} \tag{4.60}$$

En (4.44), il est important de noter que pour des conditions initiales identiques par "type" d'état (pair ou impair), on aura, pour $i = 1, \dots, N-1$:

$$\begin{aligned}
x_{2i-1}(t) &\equiv x_1(t) \\
x_{2i} &\equiv x_2(t).
\end{aligned} \tag{4.61}$$

Les définitions (4.60), la dynamique (4.44) et les identités (4.61), nous permettent d'écrire les équations d'état du système agrégé connexe comme suit:

$$\begin{aligned}
\dot{z}_1 &= -z_2 \\
\dot{z}_2 &= v_1 \\
\dot{z}_3 &= -z_4 \\
\dot{z}_4 &= v_2 \\
\dot{z}_5 &= z_2 + \sqrt{N-2} z_4 + z_6 \\
\dot{z}_6 &= 0.
\end{aligned} \tag{4.62}$$

Compte tenu de (4.60) et (4.59), on peut écrire:

$$\begin{aligned}
J = & \int_0^T q_1 z_1^2 + q_1 z_3^2 + q_2 z_2^2 + q_2 z_4^2 + q_3 z_5 + r v_1^2 + r v_2^2 \, dt + \\
& q_{F1} z_1^2(T) + q_{F1} z_3^2(T) + q_{F2} z_2^2(T) + q_{F2} z_4^2 + q_{F3} z_5^2(T).
\end{aligned} \tag{4.63}$$

Il ressort donc que:

$$J_z = J \tag{4.64}$$

D'autre part, puisque les critères de coût sont identiques, et que (4.51) est la commande optimale pour (4.44), la commande optimale en boucle fermée pour (4.62) est la même, à condition de pouvoir la synthétiser à partir des états de (4.62).

En se rappelant de (4.56), on a donc:

$$\begin{aligned}
v_1^* \triangleq u_1^* &= K_1 x_1 + K_2 x_2 + K_3(N-2)x_3 + K_4(N-2)x_4 + K_5 x_{2N-1} + K_6 x_{2N} \\
&= K_1 z_1 + K_2 z_2 + K_3 \sqrt{N-2} z_3 + K_4 \sqrt{N-2} z_4 + K_5 z_5 + K_6 z_6 \\
&= K_1^* z_1 + K_2^* z_2 + K_3^* z_3 + K_4^* z_4 + K_5^* z_5 + K_6^* z_6.
\end{aligned} \tag{4.65}$$

Il s'ensuit que les gains $K_1, K_2, K_3, K_4, K_5, K_6$ peuvent être obtenus directement à partir de l'équation de Riccati associée au problème agrégé (4.62)-(4.63), selon:

$$\begin{aligned}
K_1 &= K_1^* \\
K_2 &= K_2^* \\
K_3 &= \frac{K_3^*}{\sqrt{N-2}} \\
K_{i \ 2j} &= \frac{K_4^*}{\sqrt{N-2}} \\
K_5 &= K_5^* \\
K_6 &= K_6^*.
\end{aligned} \tag{4.66}$$

C.Q.F.D

Comme validation numérique, nous allons prendre le cas de 10 usagers dans une cellule, et comparer les gains du système à 10 usagers et les gains obtenus à partir du système agrégé.

Nous avons obtenu les gains du système agrégé (3 usagers) pour des conditions initiales différentes ou égales.

$$K_{agreg} = \begin{bmatrix} -0.0300 & 0.6192 & 0.0102 & 0.0289 & 0.0105 & 0.0777 \\ 0.0102 & 0.0289 & -0.0470 & 0.6907 & 0.0105 & 0.0777 \end{bmatrix} \tag{4.67}$$

Les gains du système à 10 usagers sont les suivants:

$K =$

Colonnes 1 à 8

−0.0300	0.6192	0.0036	0.0102	0.0036	0.0102	0.0036	0.0102
0.0036	0.0102	−0.0300	0.6192	0.0036	0.0102	0.0036	0.0102
0.0036	0.0102	0.0036	0.0102	−0.0300	0.6192	0.0036	0.0102
0.0036	0.0102	0.0036	0.0102	0.0036	0.0102	−0.0300	0.6192
0.0036	0.0102	0.0036	0.0102	0.0036	0.0102	0.0036	0.0102
0.0036	0.0102	0.0036	0.0102	0.0036	0.0102	0.0036	0.0102
0.0036	0.0102	0.0036	0.0102	0.0036	0.0102	0.0036	0.0102
0.0036	0.0102	0.0036	0.0102	0.0036	0.0102	0.0036	0.0102
0.0036	0.0102	0.0036	0.0102	0.0036	0.0102	0.0036	0.0102

Colonnes 9 à 16

0.0036	0.0102	0.0036	0.0102	0.0036	0.0102	0.0036	0.0102
0.0036	0.0102	0.0036	0.0102	0.0036	0.0102	0.0036	0.0102
0.0036	0.0102	0.0036	0.0102	0.0036	0.0102	0.0036	0.0102
0.0036	0.0102	0.0036	0.0102	0.0036	0.0102	0.0036	0.0102
−0.0300	0.6192	0.0036	0.0102	0.0036	0.0102	0.0036	0.0102
0.0036	0.0102	−0.0300	0.6192	0.0036	0.0102	0.0036	0.0102
0.0036	0.0102	0.0036	0.0102	−0.0300	0.6192	0.0036	0.0102
0.0036	0.0102	0.0036	0.0102	0.0036	0.0102	−0.0300	0.6192
0.0036	0.0102	0.0036	0.0102	0.0036	0.0102	0.0036	0.0102

Colonnes 17 à 20

0.0036	0.0102	0.0105	0.0777
0.0036	0.0102	0.0105	0.0777
0.0036	0.0102	0.0105	0.0777
0.0036	0.0102	0.0105	0.0777
0.0036	0.0102	0.0105	0.0777
0.0036	0.0102	0.0105	0.0777
0.0036	0.0102	0.0105	0.0777
0.0036	0.0102	0.0105	0.0777
-0.0300	0.6192	0.0105	0.0777

On peut voir sur la première ligne de la matrice K , la commande de l'utilisateur 1. Comme prévu, on voit bien les effets suivants:

- l'effet de l'utilisateur 1 sur lui-même, à savoir -0.0300 sur son paquet de données, 0.6192 sur son propre débit
- l'effet des autres usagers qui possèdent la même structure sur l'utilisateur 1 avec 0.0036 sur le stock de données et 0.0102 sur le débit, mais en plus, d'un usager à l'autre les effets sont les mêmes.
- l'effet du dernier usager qui est de 0.0105 et 0.0777 .

Donc sur la première ligne de la matrice K , nous avons les deux premiers éléments pour le premier usager, les deux derniers éléments pour le dernier usager, et le couple de valeurs qui se répète tout au long du vecteur entre le premier et le dernier usager; c'est l'effet des autres usagers.

Voyons maintenant, comment à partir du système agrégé, nous pouvons obtenir les gains K du système au complet. Si on se réfère aux formules (4.55):

$$\begin{aligned}
K_{11} &= K_1 = -0.0300 \\
K_{12} &= K_2 = 0.6192 \\
K_{1\ 19} &= K_5 = 0.0105 \\
K_{1\ 20} &= K_6 = 0.0777 \\
K_{1,2j-1} &= K_3/\sqrt{8} = 0.0102/\sqrt{8} = 0.0036 \\
K_{1,2j} &= K_4/\sqrt{8} = 0.0289/\sqrt{8} = 0.0102.
\end{aligned}$$

Cela donne bien les gains du système complet.

On voit donc, que notre méthode de calcul du gain d'un système à N usagers (N quelconque), à partir des gains d'un système à 3 usagers seulement donne les résultats exacts.

Nous considérons à présent une autre simulation avec cette fois-ci 15 usagers, possédant des stocks et des débits initiaux différents.

Usager	quantité de données	débit initial
1	20	0.1
2	30	0.5
3	50	1
4	40	1.5
5	60	0.2
6	70	0.3
7	80	0.4
8	10	0.6
9	45	0.7
10	35	1.7
11	75	2
12	25	0.1
13	15	0.1
14	55	0.8
15	0	0

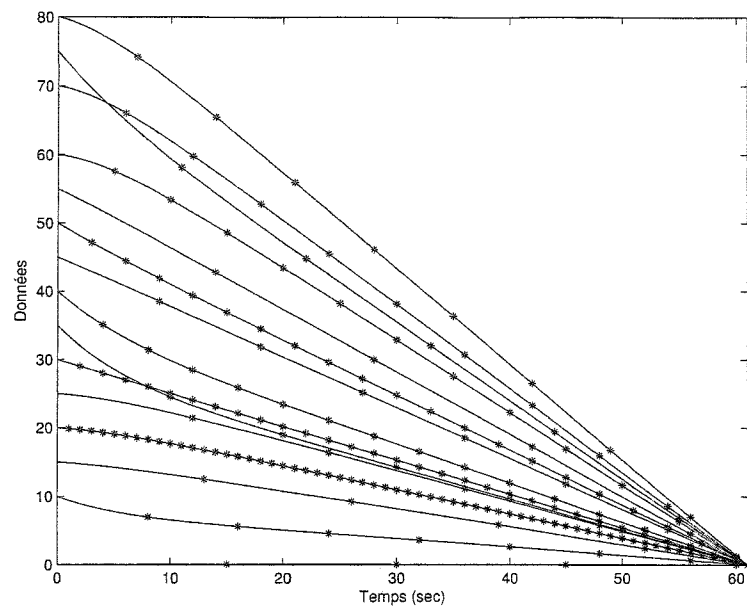


Figure 4.7 Stock de données pour le cas de 15 usagers, calculé à partir du système agrégé.

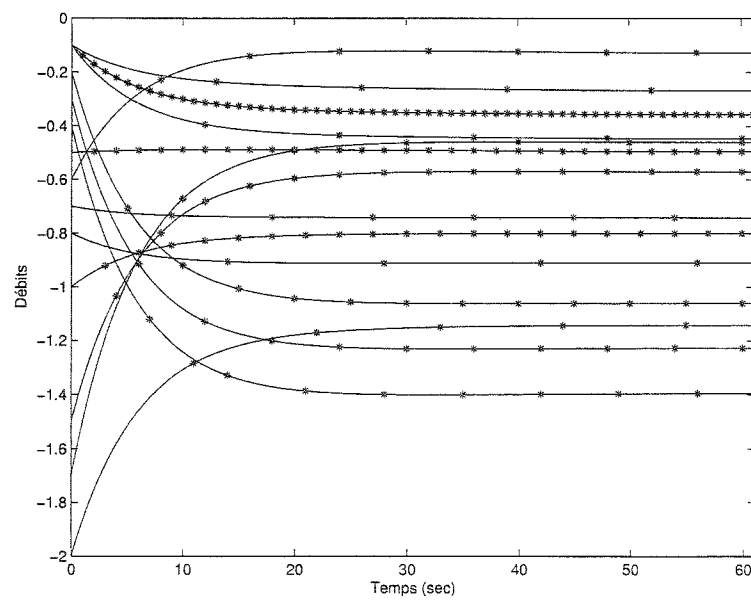


Figure 4.8 Débits pour le cas de 15 usagers, calculé à partir du système agrégé.

On pourra voir sur les figures 4.7 et 4.8, que la méthode de calcul du gain par agrégation donne des résultats intéressants, du point de vue performance de calcul, sachant qu'on a fait le calcul pour 15 usagers à partir de seulement 3 usagers. Il y aurait donc la possibilité de faire pour un nombre d'utilisateur 2 ou 3 fois plus grand avec une rapidité de calcul presque similaire que dans le cas de 3 usagers !

4.3.2 Système agrégé connexe pour le cas de N usagers ayant des g_i différents

Pour le cas des usagers ayant des g_i différents, la méthode a pu être mise en place.

Ainsi, nous avons établi le théorème de l'agrégation généralisée.

Théorème 3 (Théorème de l'agrégation généralisée) *Soit la fonctionnelle suivante, associée au système (4.29), dont la forme est:*

$$\int_0^T \left[\left(\sum_{i=1}^{N-1} q_{2i-1} x_{2i-1}^2 \right) + \left(\sum_{i=1}^{N-1} q_{2i} x_{2i}^2 \right) + q_{2N-1} x_{2N-1}^2 + q_{2N} x_{2N}^2 + \left(\sum_{i=1}^{N-1} r_i u_i^2 \right) \right] dt +$$

$$\left(\sum_{i=1}^{N-1} q_{F2i-1} x_{2i-1}^2(T) \right) + \left(\sum_{i=1}^{N-1} q_{F2i} x_{2i}^2(T) \right) + q_{F2N-1} x_{2N-1}^2(T) + q_{F2N} x_{2N}^2(T). \quad (4.68)$$

Alors, il est possible de calculer les gains du retour d'état du problème de commande optimale (4.29), (4.70), à partir du calcul de gains pour le problème de commande optimale auxiliaire suivant, sur un système d'ordre 6, dont la dynamique est la suivante:

$$\begin{aligned}
\dot{z}_1 &= -z_2 \\
\dot{z}_2 &= v_1 \\
\dot{z}_3 &= -z_4 \\
\dot{z}_4 &= v_2 \\
\dot{z}_5 &= z_2 + (\sqrt{N-2})z_4 + z_6 \\
\dot{z}_6 &= 0.
\end{aligned} \tag{4.69}$$

avec la fonction coût suivante:

$$\begin{aligned}
J_z = \int_0^T [\tilde{q}_1 (z_1^2 + z_3^2) + \tilde{q}_2 (z_2^2 + z_4^2) + \tilde{q}_3 z_5^2 + \tilde{q}_4 z_6^2 + \tilde{r} (v_1^2 + v_2^2)] dt + \\
\tilde{q}_{F1} (z_1^2(T) + z_3^2(T)) + \tilde{q}_{F2} (z_2^2(T) + z_4^2(T)) + \tilde{q}_{F3} z_5^2(T) + \tilde{q}_{F4} z_6^2(T).
\end{aligned} \tag{4.70}$$

Soit $K_i(t)$, $i = 1, \dots, 6$, les gains du retour d'état pour le problème de commande optimale (4.69), (4.70), alors, les gains du retour d'état pour le problème de commande optimale (4.29), (4.70) sont donnés par:

$$\begin{aligned}
K_{2i-1 \ 2i-1} &= K_1 \\
K_{2i \ 2i} &= K_2 \\
K_{i \ 2j-1} &= \frac{x_{2imax}}{x_{2jmax}} \frac{K_3}{\sqrt{N-2}} \quad i \neq j, \ i, j = 1, \dots, N \\
K_{i \ 2j} &= \frac{x_{2imax}}{x_{2jmax}} \frac{K_4}{\sqrt{N-2}} \\
K_{i \ 2N-1} &= \frac{x_{2imax}}{x_{2Nmax}} K_5 \\
K_{i \ 2N} &= \frac{x_{2imax}}{x_{2Nmax}} K_6.
\end{aligned} \tag{4.71}$$

Preuve:

Le modèle des usagers ayant des g_i distincts est le suivant:

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= -x_2 \\
\dot{x}_2 &= u_1 \\
\dot{x}_3 &= -x_4 \\
\dot{x}_4 &= u_2 \\
&\vdots \\
\dot{x}_{2N-1} &= \frac{1}{x_{2max}}x_2 + \frac{1}{x_{4max}}x_4 + \cdots + \frac{1}{x_{2N-2max}}x_{2N-2} + x_{2N} \\
\dot{x}_{2N} &= 0.
\end{aligned} \tag{4.72}$$

le changement de variable qui va nous permettre de se ramener au cas des usagers ayant le même g_i (4.44) est le suivant:

$$\begin{aligned}
\tilde{x}_i &\triangleq \left(\frac{x_i}{x_{2imax}} \right) \\
\tilde{u}_i &\triangleq \left(\frac{u_i}{x_{2imax}} \right)
\end{aligned} \tag{4.73}$$

et en choisissant les pondérations suivantes pour $i = 1, \dots, N-1$:

$$\begin{aligned}
q_{2i-1} &\triangleq x_{2imax}\tilde{q}_1 \\
q_{2i} &\triangleq x_{2imax}\tilde{q}_2 \\
q_{2N-1} &\triangleq x_{2imax}\tilde{q}_3 \\
q_{2N} &\triangleq x_{2imax}\tilde{q}_4 \\
q_{F2i-1} &\triangleq x_{2imax}\tilde{q}_{F1} \\
q_{F2i} &\triangleq x_{2imax}\tilde{q}_{F2} \\
q_{F2N-1} &\triangleq x_{2imax}\tilde{q}_{F3} \\
q_{F2N} &\triangleq x_{2imax}\tilde{q}_{F4} \\
r_i &\triangleq x_{2imax}\tilde{r}.
\end{aligned} \tag{4.74}$$

Ainsi, nous retombons dans le cas de l'agrégation pour un système à N usagers

ayant les mêmes g_i , et la conclusion est facile à faire.

C.Q.F.D

4.4 Commande par Scheduling pour N usagers

Dans cette section, nous allons reprendre le principe de la commande par scheduling, comme pour le cas de 2 usagers (Chapitre 3), pour l'étendre au cas de N usagers. Les calculs demeurent les mêmes. Nous reprendrons seulement les formules qu'on a établies.

La commande qui sera mise en jeu, va faire fonctionner un usager à la fois avec son débit maximal sur un intervalle de temps D_{ij} pour l'utilisateur i dans un cycle j , où tous les usagers ont obtenu une fois le droit de recevoir. Les D_{ij} sont calculés sur la courbe de débit que l'utilisateur aurait dû avoir s'il était sur l'hyperplan de contrainte (contrainte linéaire), du coup les D_{ij} varient d'un cycle à un autre. La commande ressemblera à celle de la figure 4.9 qu'on a appelé *fonction pulsée à largeur modulée*.

$$\begin{aligned} u_i(t) &= x_{2i-max} & t_j &\leq t \leq t_j + D_{ij} \\ u_i(t) &= 0 & t_j + D_{ij} &\leq t \leq t_{j+1}. \end{aligned} \quad (4.75)$$

telle que h est la longueur $(t_{j+1} - t_j)$ du cycle et

$$D_{ij} = \frac{x_{2i-1}(t_j) - x_{2i-1}(t_{j+1})}{x_{2i-max}} \quad (4.76)$$

$$t_{j+1} - t_j = T_{cycle} \quad (4.77)$$

Il est toutefois possible de donner plusieurs fois la possibilité à l'usager d'avoir la bande passante dans un même cycle.

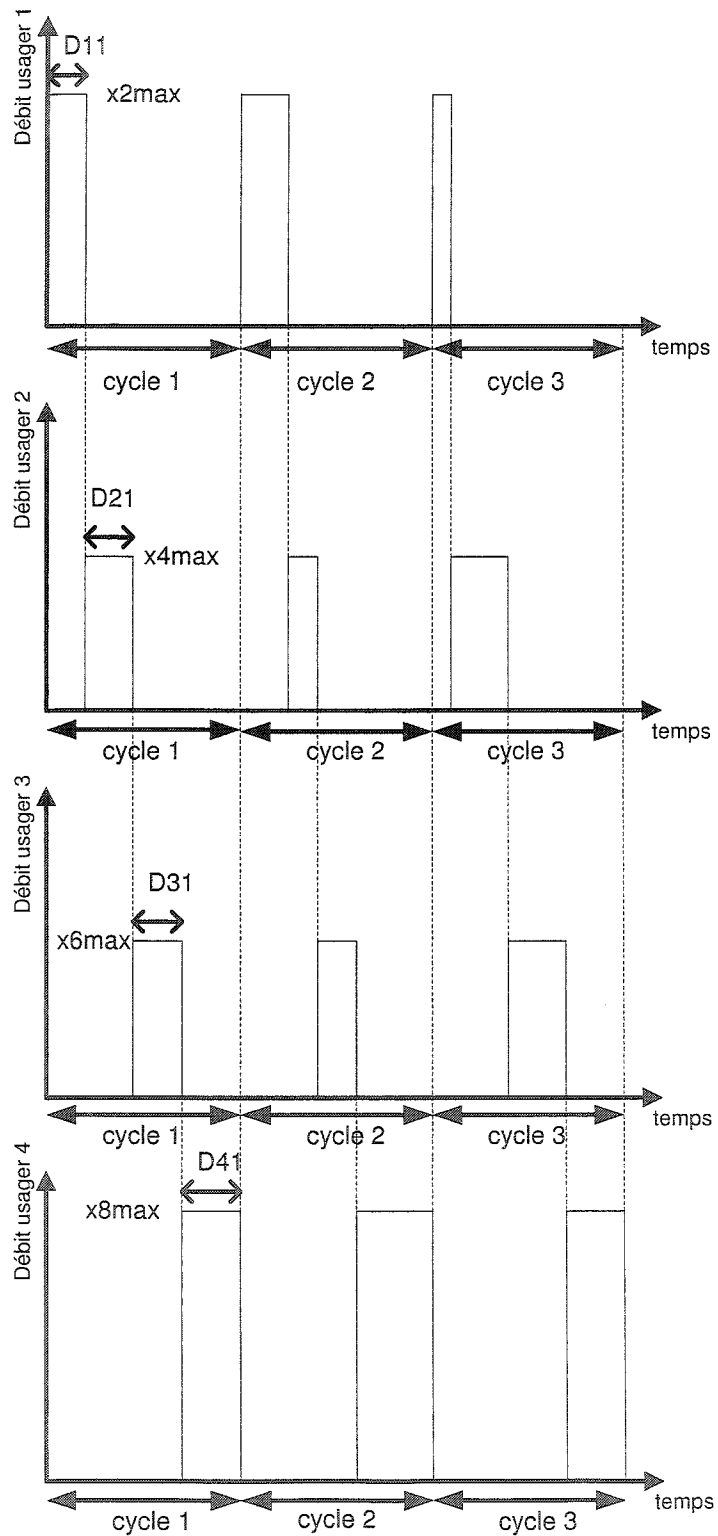


Figure 4.9 Commande par Scheduling, un usager à la fois

Nous allons résumer les étapes de calcul de la commande par scheduling dans la figure suivante

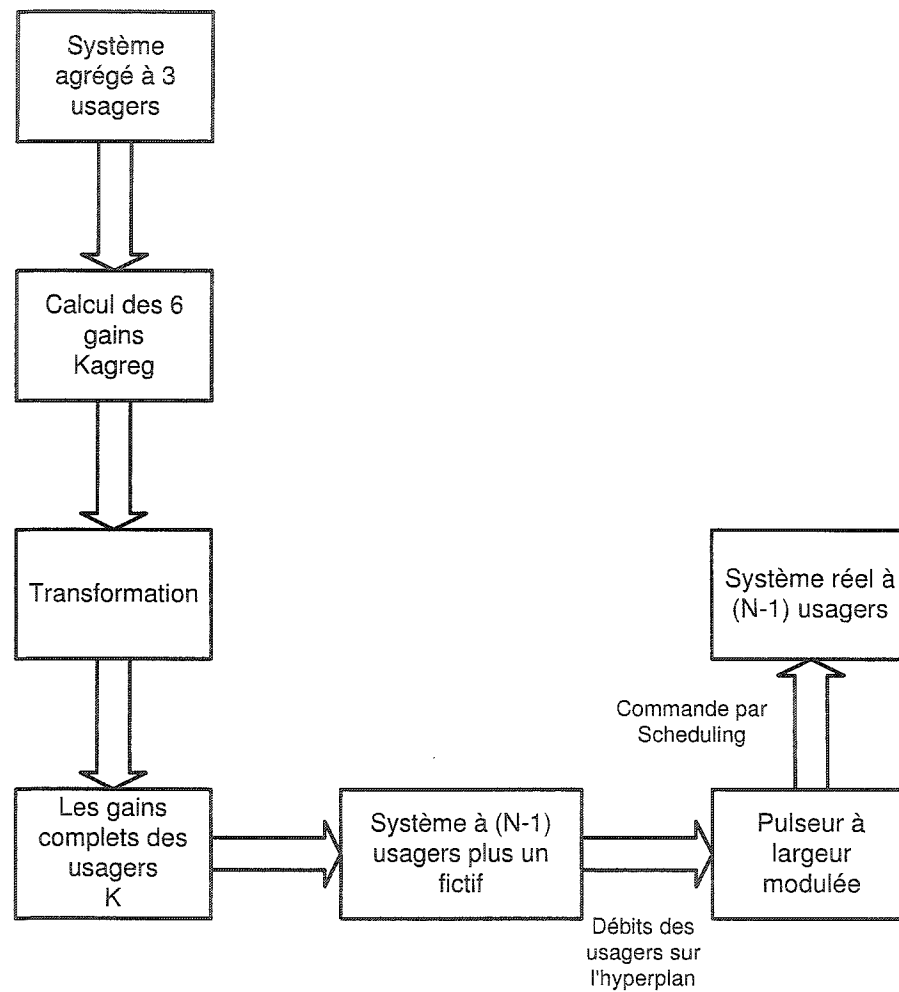


Figure 4.10 Étapes de synthèse de la commande par scheduling sur le système d'utilisateurs réels

Nous avons effectué des simulation pour 5 usagers, et avons obtenu la figure suivante

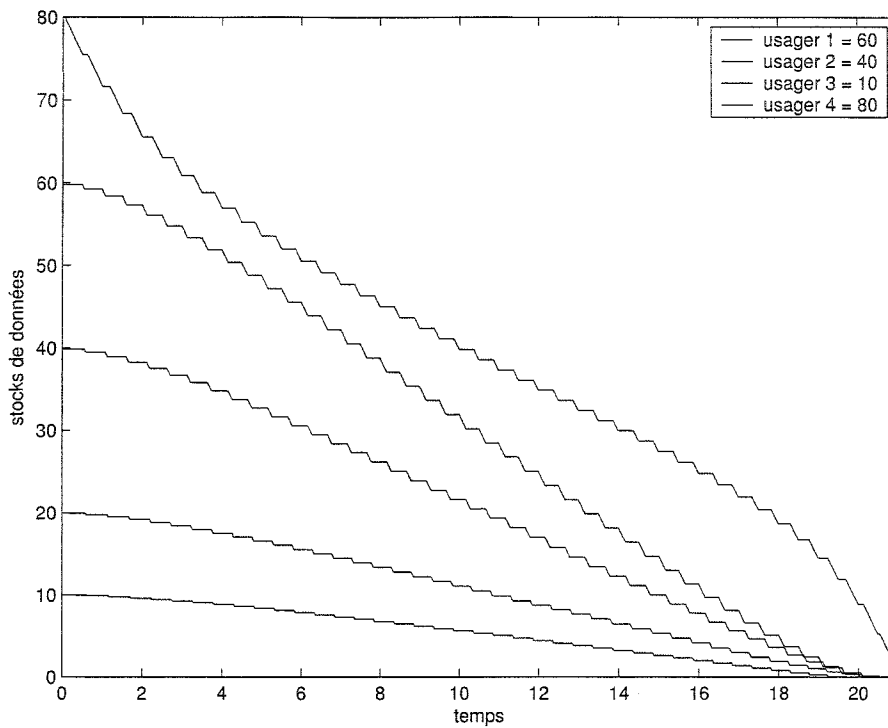


Figure 4.11 Évolution pour 5 usagers avec commande par scheduling

On pourra observer, les temps morts sur les courbes, qui montrent bien que l'utilisateur n'est pas en train de recevoir de ressources, et donc pas de transmission sur un petit laps de temps. Également sur l'intervalle où un utilisateur est en zone morte (stock constant), un autre utilisateur et un autre seulement dans la cellule voit son stock de données se vider. On peut donc dire que le contrôle ainsi synthétisé à partir de l'hyperplan, qui utilise le maximum de débit (puissance) de chaque utilisateur, un à la fois, permet de transmettre les données des utilisateurs en utilisant toutes les ressources, sans violer les contraintes du système.

4.5 Algorithme de lien descendant modifié

Dans cette section, nous allons discuter tout d'abord de la performance de notre algorithme, puis nous allons proposer une variante afin de pallier à certains défauts de la commande.

Si on reprend les graphiques des réponses au système à N usagers, on s'aperçoit tout de même que quelque soit le stock initial de chaque usager, il sera complètement transmis *seulement* après un temps T . C'est dire que si nous avons un petit usager (on entend ici par petit usager, un usager qui a un petit stock de données) et un autre qu'on appellera gros usager (5 fois le stock de données du petit), alors selon notre algorithme, les deux usagers vont finir la transmission après un temps T et pas avant. Ainsi, si on regarde sur la figure 4.12, on constatera que les deux usagers ne sont vidés qu'après $T = 13$ secondes. Cependant, si on observe à l'instant $t = T/2 = 6.5$, le gros usager a reçu 60% de son stock à transmettre (ce qui n'est pas négligeable), et le petit usager quant à lui, un peu plus de 50% de son stock. On pourra donc conclure que bien que les usagers finissent en même temps, ils observent des débits différents, ce qui permet de soulager rapidement en un certain sens le gros usager, qui représente un client qui rapporte un profit important à la station de base et dont on veut éviter le découragement, alors que le petit usager ne doit pas être négligé simplement parce qu'il représente juste un petit stock, sachant que plusieurs petits usagers représentent un gros usager. On peut donc dire, que l'algorithme proposé donne une certaine justice dans la cellule en permettant aux gros usagers comme aux petits de se débarrasser vite (moitié du temps total) de plus de la moitié de leur stocks, tout en les laissant se vider complètement au temps final.

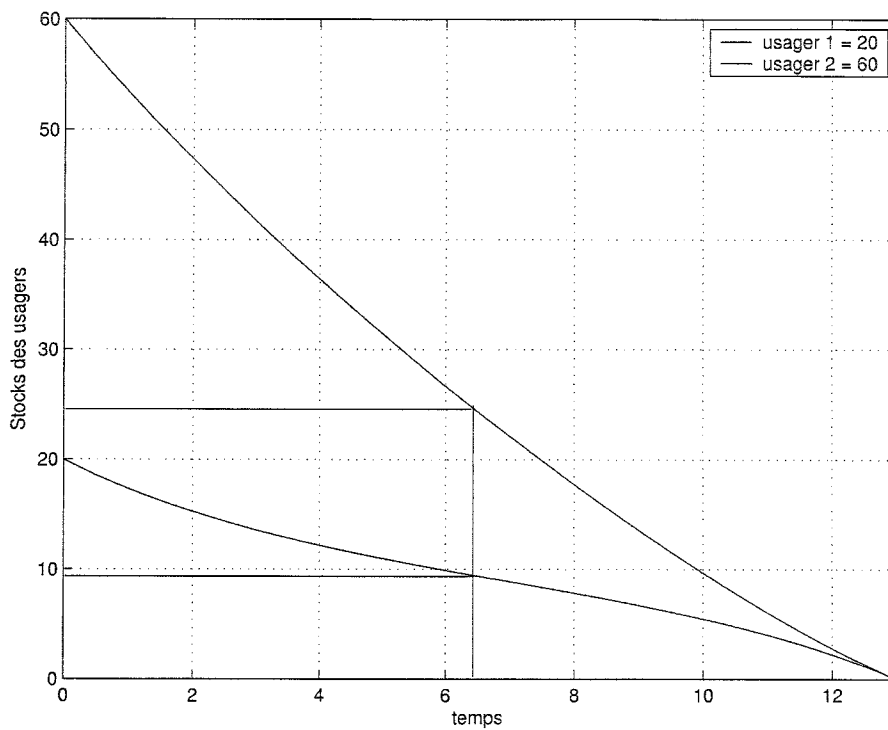


Figure 4.12 comparaison entre un gros usager et un petit usager

Si on désire maintenant vider les stocks de manière plus efficace, en faisant vider les plus petits avant les plus gros ce qui semble assez logique, il est indispensable de modifier un peu l'algorithme.

4.5.1 Modification de l'algorithme de lien descendant par redistribution de puissance

Dans ce paragraphe, nous allons voir comment on pourrait modifier l'algorithme de base pour permettre aux usager les plus petits de recevoir leurs données avant les usagers les plus gros, sans défavoriser ces derniers.

L'idée consiste à offrir à chaque usager une puissance (débit) minimale. Une fois

atteint ce débit minimal, ils verront leur stock de données suivre une trajectoire raide, et arriver à zéro. Ils sont alors retirés du système, car les laisser donnerait des stocks négatifs. Le débit qui leur aurait été alloué par l'algorithme sous contrainte de débit minimal, est alors redistribué sur les usagers dont les stocks sont encore non nuls.

Si on considère la puissance maximale, après une redéfinition des indices à un instant donné, elle se décompose comme suit sur la trajectoire optimale:

$$P_{max} = P_1 + P_2 + \dots + P_{j_0} + P_{j_0+1} + \dots + P_N \quad (4.78)$$

avec:

$$P_i \leq P_{min}, \quad i \leq j_0, \text{ et } P_i > P_{min}, \quad i > j_0.$$

on définira l'ensemble des indices $J = \{1, \dots, j_0\}$,

et P_{min} est définie par:

$$NP_{min} < P_{max} \quad (4.79)$$

N étant le nombre d'utilisateur dans la cellule, et représente la puissance minimale attribuable en tout temps à un usager.

Si on redistribue la puissance, afin de permettre aux usagers d'atteindre la puissance minimale, pour $i \leq j_0$, on aura:

$$P_{max} = (P_1 + \tilde{P}_1) + (P_2 + \tilde{P}_2) + \cdots + (P_{j_0} + \tilde{P}_{j_0}) + P_{j_0+1} + \cdots + P_N - \sum_{i=1}^{j_0} \tilde{P}_i \quad (4.80)$$

on retranche la puissance $P_a = \sum_{i=1}^{j_0} \tilde{P}_i$ sur les usagers ayant un excédent de puissance (puissance au dessus de P_{min})

Pour tout $j_0 \leq i \leq N$, on a:

$$P_i^{NOUV} = P_i^{ANC} - \alpha_i P_a, \quad 0 < \alpha_i < 1, \quad (4.81)$$

avec $\sum_{i>j_0} \alpha_i = 1$,

et où P_i^{ANC} serait la valeur attribuée par la commande optimale à l'utilisateur i , et P_i^{NOUV} la nouvelle valeur attribuée.

Il est impératif de vérifier la condition suivante, pour ne pas rendre les usagers dont la puissance attribuée diminue, déficitaires:

$$P_k - \alpha_k P_a \geq P_{min} \quad (4.82)$$

pour tout $k \in \{j_0 + 1, \dots, N\}$.

ce qui aurait comme conséquence:

$$\alpha_k \leq \frac{P_k - P_{min}}{P_a} \quad (4.83)$$

et ainsi, si on veut vérifier la condition (4.83), il faudra que:

$$\begin{aligned}
 \sum_{k=j+1}^N \alpha_k &\leq \sum_{k=j+1}^N \frac{P_k - P_{min}}{P_a} \\
 1 &\leq \frac{\sum_{k=j+1}^N P_k - (N-j)P_{min}}{P_a} \\
 1 &\leq \frac{P_{max} + P_a - jP_{min} - (N-j)P_{min}}{P_a}
 \end{aligned} \tag{4.84}$$

pour avoir finalement:

$$P_{min} \leq \frac{P_{max}}{N} \tag{4.85}$$

qui est la condition sur la puissance minimale à donner pour chaque usager.

On suggère d'utiliser l'algorithme suivant:

étape 1: on compare entre $P_i(t)$ et P_{min} ce qui nous donnerait l'ensemble J .

étape 2: si $P_{iopt} < P_{min}$ ($i \in J$) $\Rightarrow P_{iopt}(t) \equiv P_{min}$, on calcule $P_a = \sum_{i \in J} P_i$

étape 3: réaffectation des puissances, pour $i \neq J$, $P_i(t) = P_{iopt}(t) - \alpha_i P_a$

étape 4: vérification des stocks, si $x_{2i-1} = 0 \Rightarrow$ faire sortir l'utilisateur i du programme et redistribuer sa puissance sur les autres usagers au prorata des puissances dictées par la trajectoire de commande optimale initiale.

étape 5: revenir à l'étape 1.

Il est à noter que le choix des pondérations α_i , qui satisfassent (4.83), peut être délicat et est réservé pour des recherches ultérieures.

4.6 Conclusion

L'étude du cas de deux usagers, nous a préparé à aborder de façon plus éclairée le problème de N usagers. Le modèle de transmission et celui des contraintes associées, ont été généralisés de façon naturelle, ce qui a permis de construire les solutions d'une façon similaire, tout en prenant conscience des problèmes nouveaux qui peuvent survenir pour le cas de N usagers, $N > 0$. La notion d'utilisateur fictif, a permis de résoudre le problème de positivité des variables d'une façon indirecte en les intégrant, puis en les pénalisant de façon appropriée dans le modèle d'état. La notion d'agrégation est vraisemblablement, celle qui permet d'envisager l'application en temps réel de l'algorithme puisqu'elle permet de ramener les calculs des gains de retour d'état pour un système avec un nombre $N > 2$ arbitraire d'utilisateurs, à un calcul de gains de retour d'état pour un système à trois usager seulement.

CHAPITRE 5

TRANSMISSION DES DONNÉES POUR UN NOMBRE D'USAGERS VARIABLE DANS LE TEMPS

Dans ce chapitre, nous allons voir comment il est possible d'intégrer les algorithmes que nous avons synthétisé lors des chapitres précédents dans un algorithme temps-réel qui prend en charge un nombre d'utilisateurs variable dans le temps, des gains g_i variables dans le temps, et des stocks de données variables dans le temps aussi.

La réalité implique le fait que les utilisateurs sont libres. Partant de ce constat, ils peuvent entrer dans la cellule à n'importe quel moment, se trouver dans une situation plus ou moins adéquate pour la réception de données, demander à la station de base de leur transmettre une quantité de données quelconque. Pour cela, le problème de gestion de ressources devient encore plus délicat, car nous n'avons plus affaire à une situation statique, mais plutôt dynamique. Les paramètres qui vont influencer ces changements sont: N le nombre d'utilisateurs qui est variable selon le cas où des utilisateurs vont entrer en jeu pendant que d'autres sont déjà en train de recevoir des données; les utilisateurs en question possèdent des g_i différents et variables dans le temps, car ne l'oublions pas ce sont des mobiles et par conséquent leur capacité de recevoir et/ou transmettre se voit changer dans le temps; enfin la quantité de données $x_{2i-1}(0)$ pour chaque utilisateur "peut-être vue" comme une variable, selon le cas où l'utilisateur envoie plusieurs requêtes simultanément à la station de base ou encore dès réception de ses données, il envoie une nouvelle requête à la station de base.

5.1 Algorithme adaptatif déterministe pour le contrôle temps-réel

Une approche plus à même de maintenir l'optimalité des décisions consisterait à traiter ce problème dans le cadre de la théorie de la commande stochastique. Cependant, pour les fins de ce mémoire, nous allons approcher le problème comme un problème d'optimisation sur horizon glissant. Ce dernier se trouvera changé au cours du temps par paliers, et à l'intérieur de chaque palier qu'on appellera désormais *situation*, tous les paramètres sont fixes, à savoir: le nombre d'utilisateurs, les g_i et les stocks initiaux. Au cours de la situation subséquente, le nombre d'utilisateur est mis à jour selon l'arrivée de nouveaux utilisateurs dans la cellule ou la sortie d'utilisateurs ayant fini la transmission de leurs données, les g_i des utilisateurs ayant été modifiés. La procédure se poursuit pour les situations qui viendront après.

L'algorithme adaptatif prendra la forme suivante:

Pour $i = 1 : n$

Situation i: sur l'intervalle $[t_{i-1}, t_i]$

étape 1: Initialisation des paramètres

Nombre d'utilisateurs = N_i

Les g_j des utilisateurs sont supposés fixes, $j = 1, \dots, N_i$

Les stocks des utilisateurs à transmettre sont $x_0 = [x_{01}, \dots, x_{0N_i}]^T$

étape 2: Calcul des paramètres

Calcul des paramètres de l'hyperplan de contraintes:

- calcul de $x_{2jmax} = R_{jmax}$, $j = 1, \dots, N_i$
- Calcul de l'horizon de transmission $T_i = \sum_{i=1}^{N_i} \left(\frac{x_{2i-1}(0)}{R_{imax}} \right)$.

étape 3: Calcul de la commande optimale sur horizon fini par agrégation

- Détermination des 6 gains du retour d'état du système agrégé à trois usagers;
- Détermination des gains du système de N_i usagers à partir des six gains du système agrégé;
- Injecter la commande optimale dans le modèle avec contraintes linéaires

étape 4: Calcul de la commande pulsée à largeur modulée

- Détermination des gains maximum de débits à partir de x_{2jmax} $j = 1, \dots, N_i$;
- Détermination des largeurs modulées D_{ij} à partir des débits obtenus lors de l'étape 3.

étape 5: Injection de la commande pulsée à largeur modulée sur le système réel.

étape 6: à $t = t_i$

- $i = i + 1$
- Aller à Situation i .

Nous pouvons voir sur la figure 5.1 le schéma conceptuel à partir duquel notre algorithme temps réel à été implanté avec le logiciel Matlab.

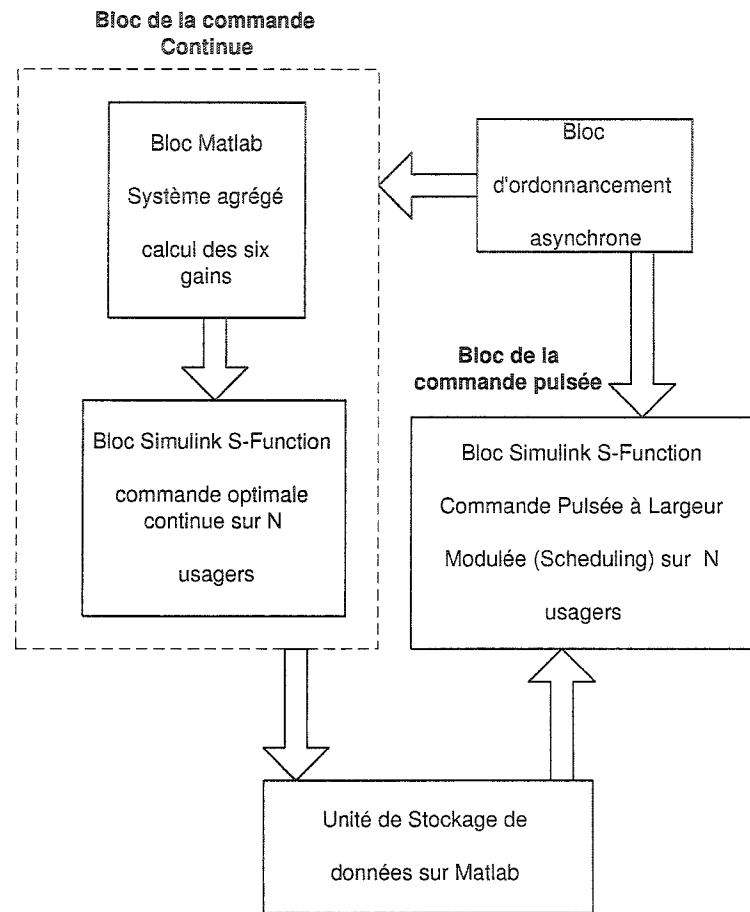


Figure 5.1 Schéma conceptuel de l'algorithme temps-réel

Le bloc de la commande continue est un bloc qui a pour rôle de calculer la commande optimale continue sur l'hyperplan de contrainte. Il est constitué du bloc du système agrégé qui a pour rôle de calculer les gains du retour d'état à partir des six gains du système agrégé. Les gains du système ainsi calculés, permettent de générer les trajectoires des variables d'états (stocks de données et débits des usagers) qui sont sur l'hyperplan de contraintes. Les données sont ensuite transmises au bloc de stockage de mémoire dans Matlab, qui transmet à son tour des données pour le bloc de la commande pulsée. Les deux blocs, à savoir la commande continue et celui de la commande pulsée sont en cours d'exécution non simultanée.

Le bloc d'ordonnancement asynchrone permet de lancer le bloc continu sur un intervalle de temps arbitraire T_{cycle} (1 seconde par exemple), pour qu'ensuite le bloc de la fonction pulsée soit exécuté sur un intervalle de même longueur, car le bloc de la commande pulsée utilise des données provenant du bloc continu. Durant cet intervalle de longueur h , de nouveaux usagers peuvent entrer dans la station de base et de nouvelles estimations sur l'état du canal sont fournis par ce bloc d'ordonnancement, en vue de reconsidérer le calcul de la commande optimale sur un intervalle de longueur T_c .

Nous avons effectué des simulations avec initialement cinq usagers dont un fictif

$$x_0^T = \begin{bmatrix} 60 & 7 & 40 & 0 & 20 & 3 & 30 & 0 & 0 & -10 \end{bmatrix}.$$

On trouve que le temps minimal de transmission est $T = 15$. On décompose cet horizon temporel en 15 situations de 1 seconde. Le bloc continu commence par générer les trajectoires du système sur l'intervalle $[0, 1]$, à la fin de cet intervalle il transmet les données au bloc de mémoire qui transmet à son tour au bloc de la commande pulsée, qui sera exécuté durant un intervalle de une seconde également. Ainsi il va générer les trajectoires pulsées, équivalentes aux trajectoires du bloc continu. Si entre temps un usager arrive à la station de base, il sera traité comme un usager supplémentaire pour l'intervalle de temps suivant $[1, 2]$, et ainsi de suite, à chaque intervalle, on fait un rafraîchissement du nombre d'usagers, des paramètres g_i et des stocks de données à transmettre (nouvelles arrivées de stocks).

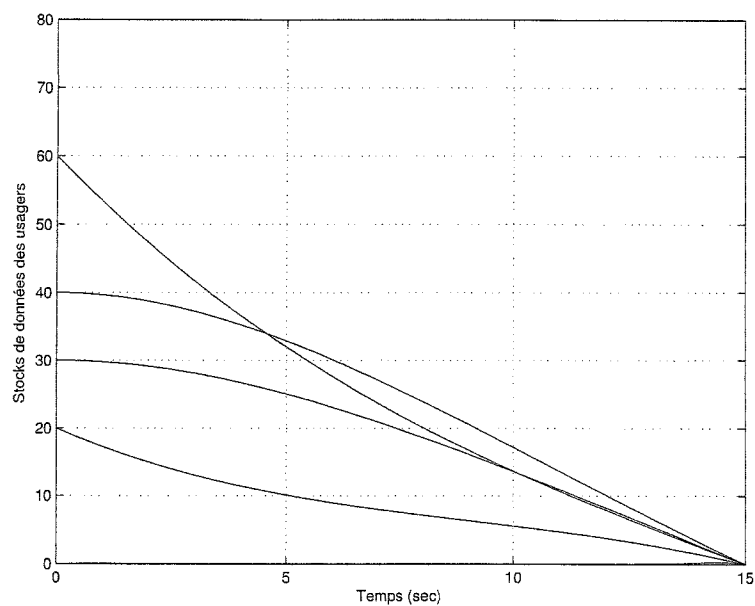


Figure 5.2 Transmission de données en temps-réel pour 5 usagers avec le bloc continu. Il n'y a aucune nouvelle arrivée sur l'horizon de commande.

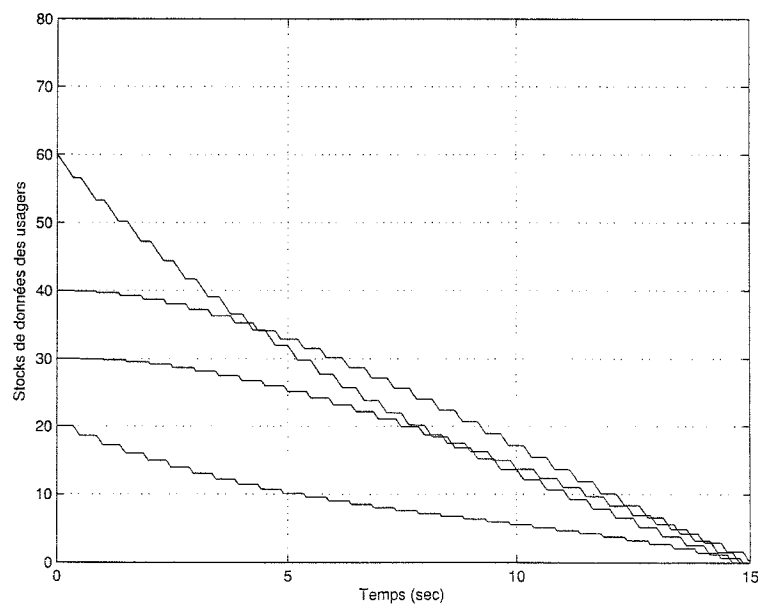


Figure 5.3 Transmission de données en temps-réel pour 5 usagers avec le bloc de la commande pulsée.

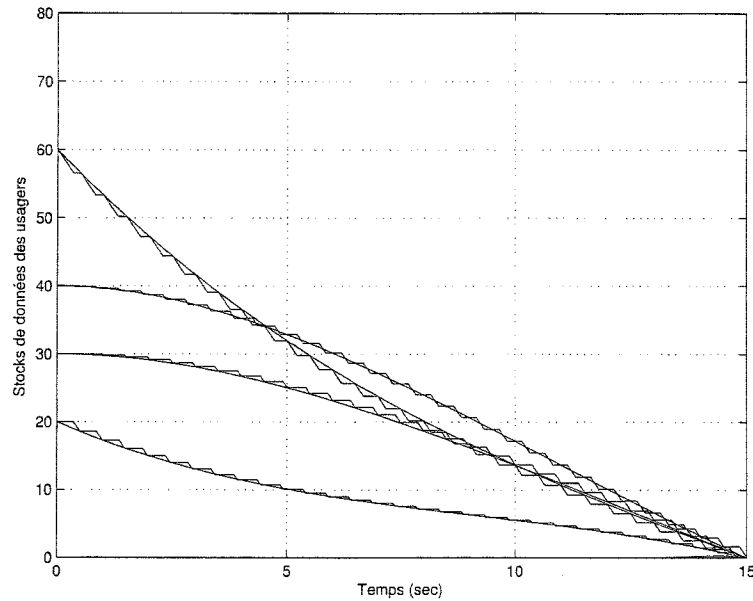


Figure 5.4 Transmission de données en temps-réel pour 5 usagers; superposition des trajectoires continues provenant du bloc continu et pulsées provenant du bloc de la commande pulsée.

On peut voir aux figures 5.2 et 5.3, que les usagers reçoivent leur données de la même manière en continu ou en fonction pulsée. On peut voir également à la figure 5.4, que les trajectoires provenant de la commande pulsée épousent bien les trajectoires provenant de la commande continue.

5.2 Influence d'un nouvel usager

Dans cette partie, nous allons voir l'effet d'un usager qui arrive dans la station de base sur les autres usagers déjà présents.

Nous reprenons la même simulation que celle de la section précédente, mais cette fois-ci, en supposant le scénario d'arrivées intermédiaires suivant: à l'instant $t = 5$, arrivée d'un usager avec un stock de données à transmettre de 50, un débit nul;

à l'instant $t = 12$, un autre usager entre dans la station de base avec un stock de données à transmettre de 70 et un débit nul.

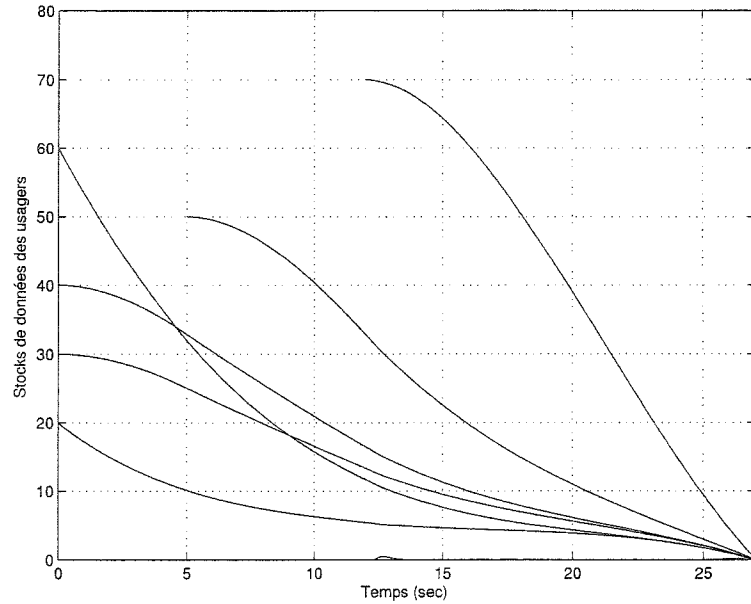


Figure 5.5 Transmission de données en temps-réel pour 5 usagers avec le bloc continu, avec arrivée d'utilisateur à l'instant $t = 5$ et $t = 12$.

On constatera avant tout le temps minimal de transmission, qui était au départ $T = 15$, est passé à $T = 20$ en premier lieu suite à l'arrivée du premier usager intermédiaire; il a été ensuite évalué à $T = 27$ quand le deuxième usager est entré. On peut voir sur la figure 5.5, que le nouvel usager à $t = 5$ ne perturbe pas le système. C'est là une conséquence de la pénalisation du terme $u(t)$, dans la fonction coût du problème de commande optimale. À $t = 12$ un autre usager avec un stock de données plus grand que tous les autres usagers entre dans la station de base. On peut voir que l'utilisateur fictif tente de rééquilibrer le système durant un petit transitoire, pour voir enfin tout le monde finir à $T = 27$.

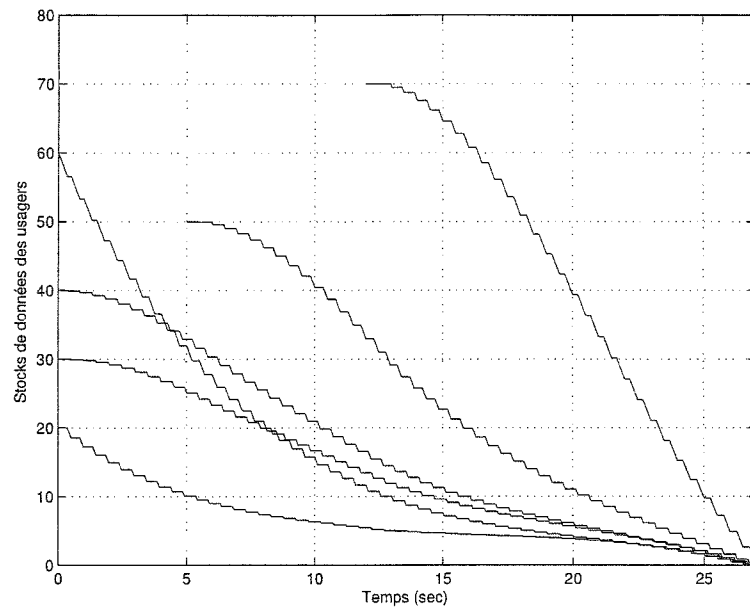


Figure 5.6 Transmission de données en temps-réel pour 5 usagers avec le bloc de la commande pulsée, avec arrivée d'usagers aux instants $t = 5$, et $t = 12$.

La commande pulsée présente des comportements similaires. La convergence de l'algorithme est bien évidente ici aussi. Enfin, sur la figure 5.7, on pourra constater encore une fois que les trajectoires continues et pulsées se superposent, ce qui justifie bien l'utilisation de la commande par scheduling en temps réel.

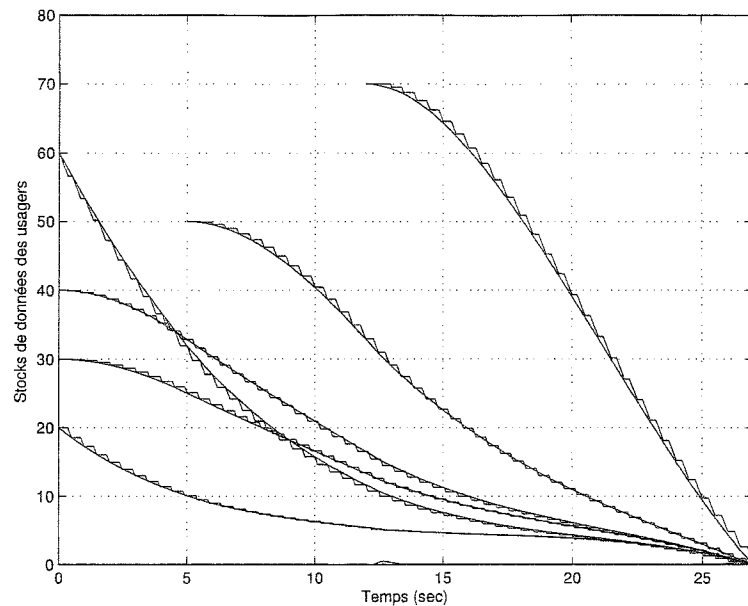


Figure 5.7 Transmission de données en temps-réel pour 5 usagers. Superposition des trajectoires continues provenant du bloc continu et pulsées provenant du bloc de la commande pulsée, avec arrivées d'usagers aux instants $t = 5$, et $t = 12$.

Si nous observons la trajectoire d'un seul usager, on pourra voir sur la figure 5.8, que la trajectoire initiale, (s'il n'y avait aucune arrivée) se termine à $T = 15$. Dès l'arrivée d'un usager à $t = 5$, on constatera juste après le changement de direction de la trajectoire, mais tout de même ce changement à lieu d'une façon tangentielle. Enfin l'arrivée d'un second à $t = 12$, détourne encore une fois la trajectoire de l'utilisateur de la trajectoire qu'il aurait dû avoir s'il n'y avait aucune arrivée, et celle ci se produit encore d'une façon tangentielle. Donc on voit bien l'influence des arrivées des usagers sur la trajectoire d'un usager déjà présent, et ceci montre bien que l'algorithme temps réel gère ces changements de façon lisse.

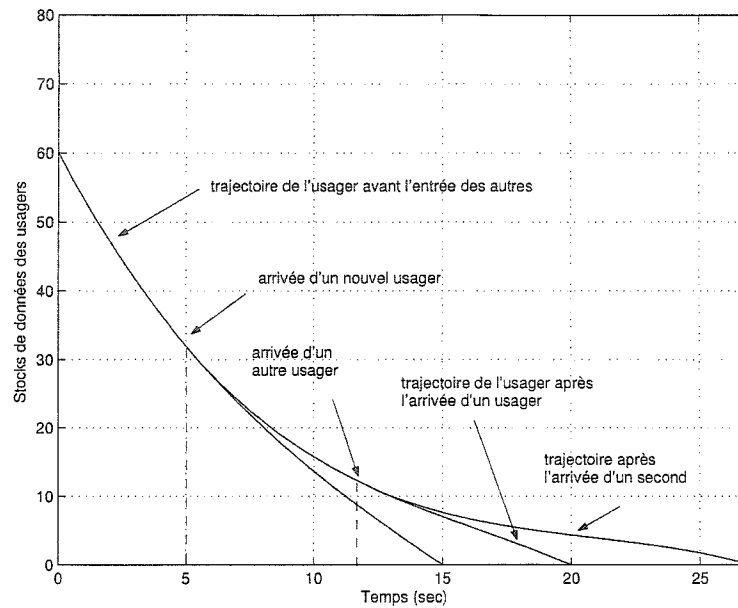


Figure 5.8 Influence des nouvelles arrivées sur la trajectoire d'un usager déjà présent.

5.3 Conclusion

L'algorithme temps-réel que nous avons proposé, permet de prendre en charge un nombre quelconque d'utilisateurs, avec des g_i différents voire, qui varient lentement dans le temps. Également, il permet des stocks de données admissibles qui peuvent varier dans le temps. L'algorithme fonctionne par situations, pour chacune d'elles, il réinitialise les paramètres sensés varier au cours de la transmission comme, le nombre d'utilisateurs actuels en transmission, l'état du canal, et enfin, les niveaux de stocks de données. On peut donc affirmer, qu'il est en mesure de gérer des arrivées stochastiques, mais pas de façon rigoureusement optimale. Enfin, l'intégration de l'agrégation développée au Chapitre 4, permet à l'algorithme de traiter un nombre très grand d'utilisateurs en temps réel en optimisant les calculs. Il faut noter de plus, d'après le paragraphe 4.5, qu'il est impératif de modifier l'algorithme afin

de permettre aux usagers les plus petits (stocks) de finir la transmission avant les plus gros (stocks), sans cela, l'algorithme à horizons fuyants, empêcherait tout le monde de finir sa transmission et ceci pour autant qu'il y ait de nouvelles arrivées à l'intérieur de l'horizon de commande.

CONCLUSION

Le but de ce travail, était d'étudier le contrôle de puissance/débit dans les réseaux cellulaires multimédias de troisième génération. Pour des raisons de simplification de l'analyse, nous avons opté pour une modélisation déterministe du comportement du système de transmission de données plutôt qu'une modélisation stochastique, qui aurait représenté de façon plus appropriée le contexte réel. Nous réussissons tout de même à démontrer le caractère utile des commandes dictées par nos algorithmes dans un contexte aléatoire, temps réel.

Les contraintes de départ sur la puissance de transmission disponible, nous ont mené directement à poser des contraintes sur les débits. De ce fait, une modélisation par modèle d'état, guidée par la théorie du régulateur quadratique s'est avéré un outil idéal pour l'étude de ce genre de problèmes. Le traitement des contraintes a constitué le noyau de notre étude, car à partir d'un problème de commande optimale avec contraintes non linéaires sur les états, il était difficile de dégager une solution utile. Cependant, suite à des raisonnements basés sur la physique mise en jeu par ces processus, à savoir l'intérêt d'opérer par scheduling (un usager à la fois) et à débit/(puissance) maximal(e), nous avons réussi à linéariser les contraintes et ceci, sans perte d'optimalité. Également, les contraintes ont pu être intégrées à la dynamique sans modifier le caractère linéaire de cette dernière.

L'étude faite sur deux usagers, nous a permis de développer un certain nombre d'idées, en particulier celle de l'importance de travailler sur un horizon de temps égal au temps minimal, puis de mettre en évidence, le rôle important du dernier usager. Le cas de N usagers, quant à lui, comporte certainement une difficulté plus grande. Toutefois, le modèle développé pour deux usagers, ainsi que la fonction coût associés, sont généralisables pour le cas de N usagers. L'analyse du cas de N

usagers nous conduit à l'introduction d'un usager dit fictif dont le rôle essentiel est le maintien de la non négativité des débits de données, ainsi que la limitation des débits maximaux des données par voie de pénalisation.

Le contrôle ainsi obtenu par scheduling, permet effectivement de donner aux usagers le maximum de ressources avec un certain rapport signal/bruit (SIR) satisfaisant. Le transfert des données se fait à temps minimal, mais en respectant une certaine notion d'équité enfermée dans le choix des pondérations dans la formulation du coût de régulation.

Enfin, quand le nombre d'usagers devient trop important, les calculs deviennent de plus en plus lourd à faire. Cependant, la notion d'agrégation par le biais de deux théorèmes qu'on a introduits, permettent de faire le calcul du retour d'état de la commande optimale du système à N usagers, à partir du calcul de gains du retour d'état pour seulement 3 usagers. Ce qui constitue un gain en calcul très important, surtout, quand on pense à l'implantation en ligne où il est impératif d'effectuer les calculs rapidement. Des simulations de la situation temps réel nous ont permis de voir l'influence des paramètres du système, tels les stocks des usagers, le nombre variable d'usagers, les g_i associés (qui peuvent varier dans le temps). Il s'est avéré, que notre algorithme, était en mesure de répondre à ces variations, en opérant par tranches de temps, appelées *situations*.

Bien que l'on puisse penser qu'une modélisation stochastique des phénomènes eût pu mener à des solutions plus rigoureusement optimales, à cause de l'anticipation des demandes de transmission à venir, possible seulement dans un contexte stochastique, nous croyons avoir obtenu des algorithmes de transmission utiles, avec un potentiel d'application en ligne intéressant. Nous croyons également que le mémoire aura jeté les bases pour des analyses plus poussées du problème de transmission optimale des données dans un contexte dynamique, par opposition aux analyses

statiques existantes de ce problème.

RÉFÉRENCES

- AGARWAL, M., PURI, A. 2002, *Base station scheduling of requests with fixed deadlines*, IEEE Proc. INFOCOM, pp. 487-496, 2002.
- AKIN, H. C., WASSERMAN, K. M. 2004, *Optimized Ressource Allocation and Scheduling in Downlink for Multimedia CDMA Wireless Systems*, IEEE WiOpt Conference, March 24-26, 2004.
- ANDERSON, B. D.O., MOORE, J. B. *Optimal Control: Linear Quadratic Methods*, Prentice Hall, 1990.
- ANDREWS, M., KUMARAN, K., RAMAN, K., STOLYAR, A., WHITING, P. and VIJAYAKUMAR, R., *Providing Quality of Service Over a Shared Wireless*, IEEE. Communications Magazine, pp. 150-154, February 2001.
- ATHANS, M., FALB, P. L., *Optimal Control: An Introduction To The Theory*, McGraw-Hill, New York, 1966.
- BEDEKAR, A., BORST, S.C., RAMANAN, K., WHITING, P.A. and YEH, E.M., *Downlink Scheduling in CDMA Data Networks*, Centrum Voor Wiskunde en Informatica, Report, PNA-R9910, 31 October 1999.
- BEDEKAR, A., BORST, S.C., RAMANAN, K., WHITING, P.A. and YEH, E.M., *Downlink Scheduling in CDMA Data Networks*, Global Telecommunications Conference - Globecom, pp. 2653-2657, 1999.
- BERGGREN, F. et KIM, S.L. *Energy-Efficient Downlink Power Control and Scheduling for CDMA Non-Real Time Data*, Multiaccess, Mobility and Teletraffic for Wireless Communications: vol. 5, Kluwer Academic Publishers Norwell, November, 2000.

- BERRY, R., *Power and Delay Trade-Offs in Fading Channels*, Phd Thesis, Massachusetts Institute of Technology, 2000.
- BORST, S., WHITING, P.A. *Dynamic Rate Control Algorithms for HDR Throughput Optimization*, IEEE. INFOCOM, pp. 976-985, 2001.
- BORST, S., WHITING, P.A. *Dynamic Channel-Sensitive Scheduling Algorithms for Wireless Data Throughput Optimization*, IEEE. Trans On Vehicular Technology, pp. 569-586, May 2003.
- BORST, S. *User-Level Performance of Channel-Aware Scheduling Algorithms in Wireless Data Networks*, INFOCOM, pp. 321- 331, 2003.
- BRYSON, A. E. Jr., HO, Y., *Applied Optimal Control: Optimization, Estimation and Control*, Taylor and Francis, Bristol, 1975.
- BRYSON, A. E. Jr., DENHAM, W. F., et DREYFUS, S. E., *Optimal Programming Problems with Inequality Constraints I: Necessary Conditions for Extremal Solutions*, AIAA Journal, pp. 2544-2550, 1963.
- CADORET, L., *Évaluation de la Capacité en Erlangs d'un Réseau CDMA Non-Homogène pour le lien Montant*, Thèse M.Sc.A, École Polytechnique de Montréal, 2000.
- CAO, Y. et LI, O.K., *Scheduling Algorithms in Broad-Band Wireless Networks*, IEEE. Proceedings, pp. 76-87, 2001.
- CONAN, J., CADORET, L., *Télécommunications Mobiles Partie 1* Polycopié de Cours ELE4705, École Polytechnique de Montréal, 2002.
- CULIOLI, J-C., *Introduction à l'optimisation* École des Mines de Paris, Éllipses, 1994.

DORATO, P., ABDALLAH, C. T., CERONE, V. *Linear-Quadratic-Control: An Introduction*, Prentice Hall, 1995.

FRIEDLAND, B., *On Controlling Systems With State-Variable Constraints*, ACC. Proceedings, pp. 2123-2127, 1998.

GAUVIN, J., *Leçons de Programmation Mathématique* Editions de l'École polytechnique de Montréal, 1995.

Jiangzhou, W., *Broadband Wireless Communications: 3G, 4G and Wireless LAN*, Kluwer Academic Publishers, Boston, 2001.

JOSHI, N., KADABA, S.R., PATEL, S. et SUNDARAM, G.S., *Downlink Scheduling in CDMA Data Networks*, Mobicom , pp. 179-190, 2000.

KULKARNI, S.S., *Opporunistic Scheduling for Wireless Systems with Multiple Interfaces and Multiple Constraints*, Technical paper, Purdue University, 2003.

LEWIS, F., SYRMOS, V., *Optimal Control* Wiley, 1995.

LIU, X., CHONG, E.K.P., SHROFF, N.B., *A framework for opprtunistic scheduling in wireless networks*, Computer Networks, pp. 451-474, 2003.

PEREZ ROMERO, J., SALLENT, O., AGUSTI, R. *Impact of User Location in W-CDMA Downlink Resource Allocation*, IEEE, 7th Int. Symp. on. Spread Spectrum Tech. Appl, 2002.

SAGE, A. P., *Optimum Systems Control*, Prentice-Hall, 1968.

ZANDER, J. et KIM, S.L., *Radio Ressource Managements in Wireless Networks* Artech House, Boston, 2001.

ZEIDAN, V. *The Riccati Equation For Optimal Control Problems With Mixed State-Control Constraints: Necessity and Sufficiency* SIAM J. Control Optimization., pp. 1297-1321, 1994.

ZHANG, D. and WASSERMAN, K. M. *Transmission Schemes for Time-Varying Wireless Channels with Partial State Observations*, IEEE. INFOCOM, pp. 467-476, 2002.

ZHOU, K., DOYLE, J. C., GLOVER, K., *Robust and Optimal Control*, Prentice Hall, 1996.

ANNEXE I

PROPRIÉTÉS DE LA MATRICE HAMILTONIENNE

I.1 Propriétés

1. Si $\lambda \in \sigma(H)$ alors $-\lambda \in \sigma(H)$

Preuve: Soit la matrice

$$J = \begin{bmatrix} 0 & -I \\ I & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{I.1})$$

elle est évidemment inversible et elle vérifie

$$\begin{aligned} J^{-1} H J &= \begin{bmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & -BR^{-1}B^T \\ -Q & -A^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -I \\ I & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -A^T & Q \\ BR^{-1}B^T & A \end{bmatrix} \quad (\text{I.2}) \\ &= -H^T. \end{aligned}$$

On peut donc voir que la matrice H et $-H^T$ sont semblables, donc elles ont les mêmes valeurs propres $\sigma(H) = \sigma(-H^T)$, et comme $\sigma(-H^T) = -\sigma(H)$ alors, H et $-H$ ont les mêmes valeurs propres.

C.Q.F.D

2. Si (A, B) est stabilisable et $(A, Q^{\frac{1}{2}})$ est détectable, alors la matrice Hamiltonienne H n'admet pas de valeurs propres sur l'axe imaginaire et elle possède n valeurs propres dans le demi-plan gauche et n valeurs propres dans le demi-plan droit.

Preuve: Supposons que la paire (A, B) est stabilisable ¹, et soit v un vecteur propre, $v \neq 0$ tel que $Hv = \lambda v$. Alors

$$\begin{bmatrix} A & -BR^{-1}B^T \\ -Q & -A^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} \quad (\text{I.3})$$

Ou

$$\begin{aligned} Av_1 - BR^{-1}B^T v_2 &= \lambda v_1 \\ -Qv_1 - A^T v_2 &= \lambda v_2 \end{aligned} \quad (\text{I.4})$$

En réorganisant les termes on obtient

$$\begin{aligned} (A - \lambda I)v_1 &= BR^{-1}B^T v_2 \\ (A^T + \lambda I)v_2 &= -Qv_1 \end{aligned} \quad (\text{I.5})$$

En pré-multipliant la première équation de (I.5) par v_2^T et la seconde équation par v_1^T et en prenant sa transposée nous obtenons

$$\begin{aligned} v_2^T Av_1 - \lambda v_2^T v_1 &= v_2^T BR^{-1}B^T v_2 \\ v_1^T Av_1 + \bar{\lambda} v_2^T v_1 &= -v_1^T Qv_1 \end{aligned} \quad (\text{I.6})$$

¹La comandabilité est une propriété, que nous navons pas supposé pour donner la solution de la commande optimale à horizon finie, qui existe toujours mais ceci n'est plus vrai pour l'horizon infini.

En soustrayant les deux équations (I.6) nous obtenons

$$(\lambda + \bar{\lambda})v_2^T v_1 = -v_1^T Q v_1 - v_2^T B R^{-1} B^T v_2 \leq 0.$$

car $Q \geq 0$ et $B R^{-1} B^T \geq 0$.

On peut conclure donc si λ est sur l'axe imaginaire, c'est à dire que $\lambda + \bar{\lambda} = 0$, alors

$$v_2^T B R^{-1} B^T v_2 = 0 \Rightarrow B R^{-1} B^T v_2 = 0 \Rightarrow (A - \lambda I)v_1 = 0$$

et (I.7)

$$v_1^T Q v_1 = 0 \Rightarrow Q^{\frac{1}{2}} = 0$$

la première équation provient de (I.5). Donc si $v_1 \neq 0$, d'après le test de PBH *Popov-Belevitch-Hautus* $(A, Q^{\frac{1}{2}})$ n'est pas observable, ce qui contredit l'hypothèse de départ. Si $v_1 = 0$, alors $v_2 \neq 0$ et en faisant le même argument on arrive à la contradiction sur la commandabilité de (A, B) . Donc H n'a pas de valeurs propres sur l'axe imaginaire. Si on se réfère à la première propriété on conclut que la matrice H possède autant de pôle dans le demi-plan gauche que dans le demi-plan droite et par conséquent elle admet n valeurs propres à partie réelle négative.

C.Q.F.D

3. Un résultat du point (2), on peut écrire

$$\begin{bmatrix} A & -BR^{-1}B^T \\ -Q & -A^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \end{bmatrix} \Lambda \quad (\text{I.8})$$

Où Λ est une matrice $n \times n$ asymptotiquement stable et $[T_1^T \ T_2^T]^T$ est la matrice des vecteurs propres de H correspondants à Λ . Alors on peut montrer que T_1 est non singulière.

ANNEXE II

SOLUTION AU PROBLÈME QUADRATIQUE À HORIZON INFINI

Le problème de la commande optimale à horizon infini est le suivant

$$\min_u J(x_0, u) = \int_0^{+\infty} [x^T(t)Qx(t) + u^T(t)Ru^T(t)] dt \quad (\text{II.1})$$

Sous la contrainte du système dynamique

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \quad x(0) = x_0 \quad (\text{II.2})$$

On supposera que

1. (A, B) est stabilisable,
2. $(A, Q^{\frac{1}{2}})$ est détectable,
3. $Q = Q^T \geq 0$,
4. $R = R^T > 0$.

Le problème est de trouver (si possible) $u^*(t), t \in [0, \infty[$ telle que $J(x_0, u)$ est minimisée pour toute condition initiale x_0 , i.e.

$$J(x_0, u^*) \leq J(x_0, u) \quad (\text{II.3})$$

pour tout u . Nous allons construire la solution optimale, en se basant sur des propriétés de l'équation algébrique de Riccati. Commençons par énoncer la proposition suivante qu'on a bien démontré.

Proposition 5 *Soit P une matrice qu'on suppose momentanément symétrique et définie positive $P = P^T > 0$, alors*

$x_0^T P x_0$ est le coût minimal de (II.1) $\Leftrightarrow P$ vérifie l'équation algébrique de Riccati.

Preuve: Montrons l'implication dans ce sens \Rightarrow

$$\begin{aligned}
 J(x_0, u) - x_0^T P x_0 &= \int_0^\infty [x^T Q x + u^T R u + \frac{d}{dt}(x^T P x)] dt \\
 &= \int_0^\infty [x^T Q x + u^T R u + \dot{x}^T P x + x^T P \dot{x}] dt \\
 &= \int_0^\infty [x^T Q x + (Ax + Bu)^T P x + x^T P (Ax + Bu) + u^T R u] dt \\
 &= \int_0^\infty [x^T (Q + A^T P + P A) x + u^T B^T P x + x^T P B u + u^T R u] dt
 \end{aligned} \tag{II.4}$$

Si on pose maintenant

$$z = \begin{bmatrix} x \\ u \end{bmatrix} \tag{II.5}$$

Nous obtenons alors

$$\begin{aligned}
J(x_0, u) - x_0^T P x_0 &= \int_0^\infty z^T F z dt \\
&= \int_0^\infty [x^T u^T] \begin{bmatrix} Q + A^T P + P A & P B \\ B^T P & R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ u \end{bmatrix} dt \quad (\text{II.6})
\end{aligned}$$

On sait par supposition que $x_0^T P x_0$ est le coût minimal, donc $\forall u \in U$, $J(x_0, u) - x_0^T P x_0 \geq 0$, il s'agit bien d'une *inégalité matricielle linéaire (LMI)*, on peut donc utiliser *le complément de Schür* qui dit que

$$F = \begin{bmatrix} F_{11} & F_{12} \\ F_{21} & F_{22} \end{bmatrix} \geq 0 \iff F_{22} > 0 \quad \text{et} \quad F_{11} - F_{12} F_{22}^{-1} F_{21}^T \geq 0$$

ce qui donne finalement

$$F = \begin{bmatrix} Q + A^T P + P A & P B \\ B^T P & R \end{bmatrix} \geq 0 \iff R > 0, P A + A^T P + Q - P B R^{-1} B^T P \geq 0 \quad (\text{II.7})$$

Le minimum se produit donc pour l'égalité, ce qui donne enfin *l'équation algébrique de Riccati*

$$P A + A^T P + Q - P B R^{-1} B^T P = 0 \quad (\text{II.8})$$

Montrons maintenant l'inverse \Leftarrow

Si P vérifie l'équation algébrique de Riccati alors si on reprend l'équation (II.4)

avec l'équation de Riccati (II.8), nous aurons

$$\begin{aligned}
 J(x_0, u) - x_0^T P x_0 &= \int_0^\infty [x^T P B R^{-1} B^T P x + u^T B^T P x + x^T P B u + u^T R u] dt \\
 &= \int_0^\infty (u + R^{-1} B^T P x)^T R (u + R^{-1} B^T P x) dt.
 \end{aligned}
 \tag{II.9}$$

Si on pose $\xi(t) = u(t) + R^{-1} B^T P x(t)$. Alors

$$J(x_0, u) - x_0^T P x_0 = \int_0^\infty \xi^T(t) R \xi(t) dt. \tag{II.10}$$

Puisque $R = R^T > 0$, alors nous avons $\xi^T(t) R \xi(t) \geq 0$ pour tout $\xi(t)$, et donc

$$\int_0^\infty \xi^T R \xi(t) dt \geq 0 \tag{II.11}$$

On voit donc que $x_0^T P x_0$ est bien une borne inférieure de (II.1), montrons à présent qu'il s'agit bien du coût minimal. On peut voir qu'il n'existe aucune commande $u \in U$ telle que $J(x_0, u) < x_0^T P x_0$, la seule commande qui atteint la borne inférieure est $\xi(t) = 0$ et donc

$$u^*(t) = -R^{-1} B^T P x(t) \tag{II.12}$$

Il s'agit bien d'un retour d'état statique qui vérifie $J(x_0, u^*) = x_0^T P x_0$.

Montrons à présent que la commande optimale est bien stabilisante c'est à dire

$u^*(t) \in U$. Puisque la commande optimale $u^*(t) = Kx(t)$ alors il suffit de montrer que

$$A_K = A + BK = A - BR^{-1}B^T P$$

Possède toutes ses valeurs propres dans le demi-plan gauche. Pour ce faire réorganisons l'équation algébrique de Riccati (II.9) comme suit

$$\begin{aligned} 0 &= A^T P + PA - PBR^{-1}B^T P + Q \\ &= (A - BR^{-1}B^T P)^T P + P(A - BR^{-1}B^T P) + PBR^{-1}B^T P + Q \\ &= A_K^T P + PA_K + PBR^{-1}B^T P + Q. \end{aligned}$$

Soit v un vecteur propre de A_K i.e., $A_K v = \lambda v, v \neq 0$. Pour montrer que $\lambda \in \mathbb{C}^-$, il suffit de montrer que $\lambda + \bar{\lambda} < 0$. Si on post et pré multiplie par v^T et v respectivement on aura

$$\begin{aligned} 0 &= v^T [A_K^T P + PA_K + PBR^{-1}B^T P + Q] v \\ &= \underbrace{v^T P v}_{> 0} (\lambda + \bar{\lambda}) + \underbrace{v^T PBR^{-1}B^T P v}_{\geq 0} + \underbrace{v^T Q v}_{\geq 0}. \end{aligned}$$

Donc vu que c'est une forme quadratique, on aura soit $\lambda + \bar{\lambda} < 0$ ou bien

$$\lambda + \bar{\lambda} = 0$$

ce qui implique que

$$Q^{\frac{1}{2}}v = 0$$

et

$$R^{-1}B^TPv = 0.$$

Mais, $R^{-1}B^TPv = 0 \implies A_Kv = Av = \lambda v$, donnera forcément,

$$\begin{bmatrix} \lambda I - A \\ Q^{\frac{1}{2}} \end{bmatrix} v = 0,$$

Cette dernière contredit l'observabilité de $(A, Q^{\frac{1}{2}})$. Ceci prouve que seulement le cas $\lambda + \bar{\lambda} < 0$ est possible, d'où A_K est stable asymptotiquement, ce qui achève la démonstration.

C.Q.F.D

Un dernier point important, supposons que $u \notin U$ i.e. $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) \neq 0$.

Ceci implique que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t x^T(\tau)x(\tau)d\tau = \infty.$$

Mais en plus, vu que la paire $(A, Q^{\frac{1}{2}})$ est observable, nous avons aussi

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t x^T Q x(\tau)d\tau = \infty.$$

On conclue donc que si $u \notin U$ alors $J(x_0, u)$ est non bornée. Ainsi $J(x_0, u)$ atteint son minimum dans l'ensemble U .

Le théorème suivant nous assure que $P = P^T > 0$,

Théorème II.0.1 (Zhou) *La solution de l'équation algébrique de Riccati $P = YX^{-1}$ est réelle, symétrique et positive définie*

Preuve: Soient Y, X telles que définies dans le paragraphe (2.3.2). On va montrer que

$$X^T Y \tag{II.13}$$

est symétrique.

Pour monter cela, il existe une matrice stable qu'on notera $H_s \in R^{n \times n}$ telle que

$$H \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} H_s \tag{II.14}$$

(ici H_s est la projection de l'espace engendré par $Im(H)$ sur le sous-espace invariant des vecteurs propres correspondants aux valeurs propres stables, celle-ci existe toujours, il suffit d'utiliser la décomposition de Schur.)

On prémultiplie (II.14) par

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix}^T J \tag{II.15}$$

pour avoir

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix}^T JH \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix}^T J \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} H_s. \quad (\text{II.16})$$

Puisque JH est symétrique, alors en opérant les produits dans (II.16), on trouve:

$$\begin{aligned} (-X^T Y + Y^T X) H_s &= H_s^T (-X^T Y + Y^T X)^T \\ &= -H_s^T (-X^T Y + Y^T X). \end{aligned} \quad (\text{II.17})$$

C'est une équation de Lyapunov. Puisque H_s est une matrice stable, la solution unique est

$$-X^T Y + Y^T X = 0. \quad (\text{II.18})$$

Ceci prouve bien (II.13). Puisque X est nonsingulière et $P = (X^{-1})^T (X^T Y) X^{-1}$, alors P est symétrique.

Montrons à présent que P est définie positive

Reprenons l'équation algébrique de Riccati (II.8)

$$PA + A^T P + Q - PBR^{-1}B^T P = 0$$

qu'on peut réécrire de la manière suivante:

$$(A - BR^{-1}B^TP)^T P + P(A - BR^{-1}B^TP) + PBR^{-1}B^TP + Q = 0 \quad (\text{II.19})$$

On sait que $(A - BR^{-1}B^TP)$ est stable (preuve dans la proposition) donc la solution à l'équation de Riccati (II.19) peut-être vue comme solution de l'équation de Lyapunov avec comme variable dépendante, et la solution est (voir section sur la commande à action terminale):

$$P = \int_0^\infty e^{(A - BR^{-1}B^TP)^T t} (PBR^{-1}B^TP + Q) e^{(A - BR^{-1}B^TP)t} dt. \quad (\text{II.20})$$

Comme $PBR^{-1}B^TP + Q \geq 0$ donc P l'est aussi.

C.Q.F.D

Enfin, le corollaire suivant, nous assure de l'unicité de la solution stabilisante, semie-définie positive de l'équation algébrique de Riccati.

Corollaire 3 (Zhou) *Si la paire (A, B) est stabilisable et la paire $(A, Q^{\frac{1}{2}})$ est détectable. Alors l'équation de Riccati*

$$A^TP + PA - PBR^{-1}B^TP + Q = 0$$

possède une solution unique semie-définie positive. Mais en plus, cette solution est stabilisante.

Preuve: Il est évident d'après les théorèmes ci-dessous que l'équation de Riccati

possède une solution unique semie-définie positive et stabilisante. Il reste à montrer que n'importe quelle solution semie-définie $P \geq 0$ doit être stabilisante. Du fait de l'unicité de la solution stabilisante, on peut conclure qu'il y'a juste une seule solution semie-définie positive. Pour ce faire supposons qu'il existe une solution $P \geq 0$ satisfaisant l'équation de Riccati mais non stabilisante. Il suffit de réécrire l'équation de Riccati telle que dans (II.19)

$$(A - BR^{-1}B^TP)^TP + P(A - BR^{-1}B^TP) + PBR^{-1}B^TP + Q = 0 \quad (\text{II.21})$$

et soient λ et v , une valeur propre instable et le vecteur propre correspondant pour la matrice $A - BR^{-1}B^TP$ respectivement,i.e.,

$$(A - BR^{-1}B^TP)v = \lambda v. \quad (\text{II.22})$$

Maintenant, prémultiplions et postmultiplions l'équation (II.21) par v^T et v , respectivement, ce qui nous donnera:

$$(\lambda + \bar{\lambda})v^TPv + v^T(PBR^{-1}B^TP + Q)v = 0. \quad (\text{II.23})$$

Ceci implique que:

$$B^TPv = 0, \quad Q^{\frac{1}{2}}v = 0 \quad (\text{II.24})$$

puisque $\lambda + \bar{\lambda} = \text{Re}(\lambda) \geq 0$ et $P \geq 0$. finalement en repensant à (II.22), on trouve

finalement

$$Av = \lambda v, \quad Q^{\frac{1}{2}}v = 0$$

ce que contredit la détectabilité de $(A, Q^{\frac{1}{2}})$. Donc $\Re(\lambda) < 0$, et donc $P \geq 0$ est une solution stabilisante.

C.Q.F.D

Tout ceci nous permet de bien voir pourquoi dans le cas de la commande LQR à horizon infini il est indispensable d'avoir les conditions de stabilisabilité et de détectabilité telles qu'elles sont définies au début, afin de garantir l'existence et l'unicité de la solution contrairement au cas de la commande LQR à horizon finie où elle existe toujours.

ANNEXE III

SOLUTION DE L'ÉQUATION DIFFÉRENTIELLE DE LYAPUNOV
POUR LE CAS DE DEUX USAGERS PAR L'ALGÈBRE DE
KRONECKER

Nous allons donner la solution de l'équation de Lyapunov pour le cas de deux usagers.

Reprenons l'équation de Lyapunov (3.82)

$$\begin{aligned}\dot{S} &= SA^T + AS - BR^{-1}B^T \\ S(T) &= 0I.\end{aligned}\tag{III.1}$$

D'après la solution de la méthode 2 section 2.3.3.2:

$$vec(S) = e^{(A \oplus A)(t-t_0)} vec(S_0) + \int_{t_0}^t e^{(A \oplus A)(t-\tau)} vec(N) d\tau \tag{III.2}$$

Sachant que la matrice A est nilpotente d'indice 2, est-il possible de profiter de cette caractéristique pour calculer la matrice $e^{A \oplus A}$?

La réponse à cette question se trouve dans le lemme qu'on a établi

Lemme 1 *A est une matrice nilpotente d'indice $r \implies A \oplus A$ est une matrice nilpotente d'indice $2r - 1$.*

Preuve: Soit A une matrice nilpotente d'indice r , alors $A^r = 0$ et $A^{r-i} \neq 0$ pour

tout $1 \leq i \leq r$.

Proposons-nous de calculer $(A \oplus A)^n$ pour un $n \geq r$

$$\begin{aligned}
 (A \oplus A)^n &= (A \otimes I + I \otimes A)^n \\
 &= \sum_{p=0}^n C_n^p (A \otimes I)^p (I \otimes A)^{n-p} \\
 &= \sum_{p=0}^n (A^p \otimes I) (I \otimes A^{n-p}) \\
 &= \sum_{p=0}^n C_n^p (A^p \otimes A^{n-p}) \tag{III.3} \\
 &= \sum_{p=0}^{r-1} C_n^p (A^p \otimes A^{n-p}) + \underbrace{\sum_{p=r}^n C_n^p (A^p \otimes A^{n-p})}_{=0}
 \end{aligned}$$

Nous avons utilisé la propriété du produit de Kronecker $(A \otimes B) \cdot (C \otimes D) = A \cdot C \otimes B \cdot D$.

Si on voit le terme $\sum_{p=0}^{r-1} C_n^p (A^p \otimes A^{n-p})$, pour qu'il soit nul, il suffit que l'une des matrices composant le produit de Kronecker soit nulle, or les terme en A^p pour $0 \leq p \leq r-1$ ne seront jamais nul du fait de la nilpotence de A qui est d'indice r , il resterait donc à avoir pour quelle condition les matrices A^{n-p} pour $0 \leq p \leq r-1$ sont nulles.

Si on voit maintenant l'ensemble des indices, on peut voir donc que:

$$0 \leq p \leq r-1 \Rightarrow n-r+1 \leq n-p \leq n. \tag{III.4}$$

Il est donc évident de voir que si on choisi $n - r + 1 \geq r$, on est certain de vérifier $A^{n-p} = 0$, pour tout $0 \leq p \leq r - 1$, il suffit donc de choisir:

$$n - r + 1 = r \implies n = 2r - 1. \quad (\text{III.5})$$

C.Q.F.D

On peut maintenant exploiter le résultat qu'on vient d'établir pour donner l'expression de la solution de l'équation de Lyapunov (III.2), sachant que l'indice de nilpotence de A est $r = 2$, ce qui donne un indice de nilpotence de $A \oplus A$ égal à $\varrho = 3$

$$\begin{aligned} \text{vec}(S) = & [I(t - t_0) + (A \oplus A)(t - t_0) + \frac{1}{2}(A \oplus A)^2(t - t_0)^2] \text{vec}(S_0) \\ & + \int_{t_0}^t [I(t - \tau) + (A \oplus A)(t - \tau) + \frac{1}{2}(A \oplus A)^2(t - \tau)^2] \text{vec}(N) d\tau. \end{aligned} \quad (\text{III.6})$$

avec :

$$A \oplus A = A \otimes I + I \otimes A \quad (\text{III.7})$$

$$(A \oplus A)^2 = A^2 \otimes I + I \otimes A^2 + 2(A \otimes A).$$

Le reste de la solution suit les mêmes étapes de résolution que celles de la méthode 1, qu'on a utilisé dans le chapitre 3.